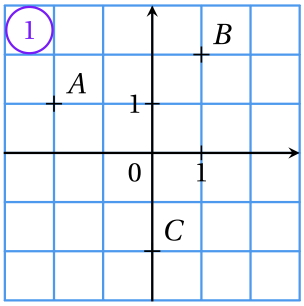
Corrections Exercices : Se repérer dans le plan

==================Correction 1===================

Sur chacune des figures ci-contre :

1. Lire les coordonnées des points A, B et C.
2. Calculer les coordonnées du milieu de $[AC]$.
3. On considère le point $D\,(10\,;\,8)$.
   Calculer les coordonnées du milieu de $[BD]$.
4. Calculer les longueurs AB, AC et BC.



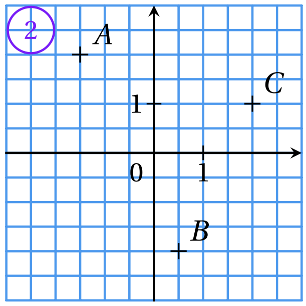


Figure ① :

1. $A\,(\underset{x_A}{-2}\,;\,\underset{y_A}{1})$ $\quad B\,(\underset{x_B}{1}\,;\,\underset{y_B}{2})$ $\quad C\,(\underset{x_C}{0}\,;\,\underset{y_C}{-2})$

2. On calcule la moyenne des abscisses et la moyenne des ordonnées :

   Milieu de $[AC]$: $\left(\dfrac{-2+0}{2}\,;\,\dfrac{1+-2}{2}\right)$ soit $(-1\,;\,-0,5)$

3. On calcule la moyenne des abscisses et la moyenne des ordonnées :

   Milieu de $[BD]$: $\left(\dfrac{1+10}{2}\,;\,\dfrac{2+8}{2}\right)$ soit $(5,5\,;\,5)$

4. $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(1-(-2))^2+(2-1)^2}=\sqrt{(3)^2+(1)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

   $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(0-(-2))^2+(-2-1)^2}=\sqrt{(2)^2+(-3)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

   $BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(0-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$

Figure ② :

1. $A\,(\underset{x_A}{-1,5}\,;\,\underset{y_A}{2})$ $\quad B\,(\underset{x_B}{0,5}\,;\,\underset{y_B}{-2})$ $\quad C\,(\underset{x_C}{2}\,;\,\underset{y_C}{1})$

2. On calcule la moyenne des abscisses et la moyenne des ordonnées :

   Milieu de $[AC]$: $\left(\dfrac{-1,5+2}{2}\,;\,\dfrac{2+1}{2}\right)$ soit $(0,25\,;\,1,5)$

3. On calcule la moyenne des abscisses et la moyenne des ordonnées :

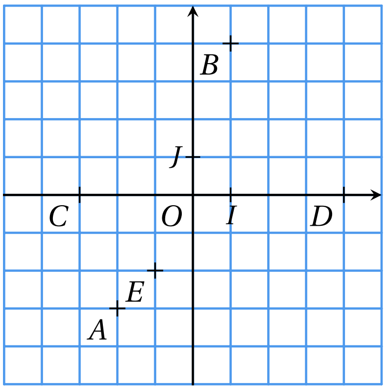
   Milieu de $[BD]$: $\left(\dfrac{0,5+10}{2}\,;\,\dfrac{-2+8}{2}\right)$ soit $(5,25\,;\,3)$

4. $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(0,5-(-1,5))^2+(-2-2)^2}=\sqrt{(2)^2+(-4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

   $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(2-(-1,5))^2+(1-2)^2}=\sqrt{(3,5)^2+(-1)^2}=\sqrt{12,25+1}=\sqrt{13,25}$

   $BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(2-0,5)^2+(1-(-2))^2}=\sqrt{(1,5)^2+(3)^2}=\sqrt{2,25+9}=\sqrt{11,25}$

==================Correction 2===================



1. Déterminer graphiquement les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère $(O; I, J)$.
2. Placer le point E de coordonnées $(-1\ ;\ -2)$.
3. Calculer les distances AC, CE et AE.
4. Démontrer que le triangle ACE est rectangle.

1. $A\,(-2\ ;\ -3)$ $B\,(1\ ;\ -4)$ $C\,(-3\ ;\ 0)$ $D\,(4\ ;\ 0)$
2. Voir graphique ci-dessus.
3. $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-3-(-2))^2 + (0-(-3))^2} = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

   $CE = \sqrt{(x_E - x_C)^2 + (y_E - y_C)^2} = \sqrt{(-1-(-3))^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

   $AE = \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2} = \sqrt{(-1-(-2))^2 + (-2-(-3))^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
4. ACE n'est pas isocèle, regardons s'il est rectangle avec Pythagore :
   - Le plus grand côté : $AC^2 = \sqrt{10}^2 = 10$;
   - $CE^2 + AE^2 = \sqrt{8}^2 + \sqrt{2}^2 = 8 + 2 = 10$;
   - Conclusion : D'après Pythagore, ACE est un triangle rectangle en E.

==================Correction 3===================

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$, on a placé les points suivants :

- $S(-3,2\ ;\ 3,2)$ • $A(8\ ;\ 1,6)$ • $W(3,2\ ;\ 8)$ • $P(1,6\ ;\ -3,2)$

1. Calculer les longueurs des trois côtés de SWA.
2. Montrer que le triangle SWA est isocèle rectangle.
3. Calculer les coordonnées des milieux des segments $[SA]$ et $[WP]$.
4. Montrer que $SWAP$ est un carré.

1. $SA = \sqrt{(x_A - x_S)^2 + (y_A - y_S)^2} = \sqrt{(8-(-3,2))^2 + (1,6-3,2)^2} = \sqrt{11,2^2 + (-1,6)^2} = \sqrt{125,44 + 2,56}$
   $SA = \sqrt{128} \approx 11,31$

   $AW = \sqrt{(x_W - x_A)^2 + (y_W - y_A)^2} = \sqrt{(3,2-8)^2 + (8-1,6)^2} = \sqrt{(-4,8)^2 + (6,4)^2} = \sqrt{23,04 + 40,96} = \sqrt{64} = 8$

   $SW = \sqrt{(x_W - x_S)^2 + (y_W - y_S)^2} = \sqrt{(3,2-(-3,2))^2 + (8-3,2)^2} = \sqrt{6,4^2 + 4,8^2} = \sqrt{40,96 + 23,04} = \sqrt{64} = 8$
2. On utilise Pythagore avec les valeurs exactes :
   - Le plus grand côté : $SA^2 = \sqrt{128}^2 = 128$;
   - $AW^2 + SW^2 = 8^2 + 8^2 = 64 + 64 = 128$;
   - Conclusion : D'après Pythagore, SWA est un triangle rectangle en W. De plus, $AW = SW$ donc SWA est isocèle rectangle en W.
3. On calcule la moyenne des abscisses et la moyenne des ordonnées :

   Milieu de $[SA]$: $\left(\dfrac{-3,2+8}{2}\ ;\ \dfrac{3,2+1,6}{2}\right)$ soit $(2,4\ ;\ 2,4)$

   Milieu de $[WP]$: $\left(\dfrac{3,2+1,6}{2}\ ;\ \dfrac{8+(-3,2)}{2}\right)$ soit $(2,4\ ;\ 2,4)$

   On observe que $[SA]$ et $[WP]$ se coupent en leur milieu.

4. Les diagonales du quadrilatère $SWAP$, $[SA]$ et $[WP]$, se coupent en leur milieu.
   $SWAP$ est donc un **parallélogramme**.

   De plus, deux côtés consécutifs ont la même longueur $(AW = SW)$ donc les 4 côtés du parallélogramme $SWAP$ sont égaux et $SWAP$ est un **losange**.

   Enfin, $SWAP$ est un losange et possède un angle droit en W, c'est donc un **carré**.

==================Correction 4===================

Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$ on considère les points suivants :

• $A(-1\ ;\ 4)$ • $B(-2\ ;\ 1)$ • $C(13\ ;\ -4)$ • $D(14\ ;\ -1)$

1. Calculer les coordonnées du milieu du segment $[AC]$ puis du segment $[BD]$.
2. Calculer les longueurs AC et BD.
3. Conclure.

(Voir l'exemple 3 du cours...)

1. On calcule la moyenne des abscisses et la moyenne des ordonnées :

   Milieu de $[AC]$: $\left(\dfrac{x_A + x_C}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_C}{2}\right) = \left(\dfrac{-1+13}{2}\ ;\ \dfrac{4+(-4)}{2}\right) = (6\ ;\ 0)$.

   Milieu de $[BD]$: $\left(\dfrac{x_B + x_D}{2}\ ;\ \dfrac{y_A + y_C}{2}\right) = \left(\dfrac{-2+14}{2}\ ;\ \dfrac{1+(-1)}{2}\right) = (6\ ;\ 0)$.

   Les diagonales de $ABCD$ se coupent en leur milieu, il s'agit donc d'un **parallélogramme**.

2. On utilise la propriété du cours :

   $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2}$ $BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + \left(y_D - y_B\right)^2}$

   $AC = \sqrt{(13-(-1))^2 + (-4-4)^2}$ $BD = \sqrt{(14-(-2))^2 + (-1-1)^2}$

   $AC = \sqrt{14^2 + (-8)^2}$ $BD = \sqrt{16^2 + (-2)^2}$

   $AC = \sqrt{196 + 64}$ $BD = \sqrt{256 + 4}$

   $AC = \sqrt{260}$ $BD = \sqrt{260}$

   Les diagonales de $ABCD$ ont la même longueur.

3. « *Si un quadrilatère a ses diagonales de même longueur qui se coupent en leur milieu alors c'est un rectangle* ».

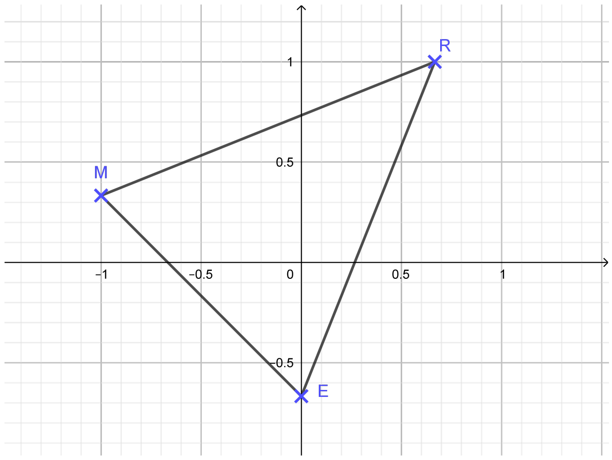
   Donc $ABCD$ est un rectangle.

==================Correction 5===================

Dans un plan muni d'un repère $(O; I, J)$, on considère les points M, E et R de coordonnées :

• $M\left(-1\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$ • $E\left(0\ ;\ -\dfrac{2}{3}\right)$ • $R\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ 1\right)$

1. Faire une figure.
2. Calculer les longueurs des trois côtés de MER.
3. Quelle est la nature de ce triangle ?

1. 

2. $ME = \sqrt{(x_E - x_M)^2 + (y_E - y_M)^2} = \sqrt{(0-(-1))^2 + \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

   $MR = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - (-1)\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - (-\frac{3}{3})\right)^2 + \left(\frac{3}{3} - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{29}{9}}$

   $ER = \sqrt{(x_R - x_E)^2 + (y_R - y_E)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{29}{9}}$

3. MER est isocèle en R et puisque $ME < MR$ il n'est pas rectangle.