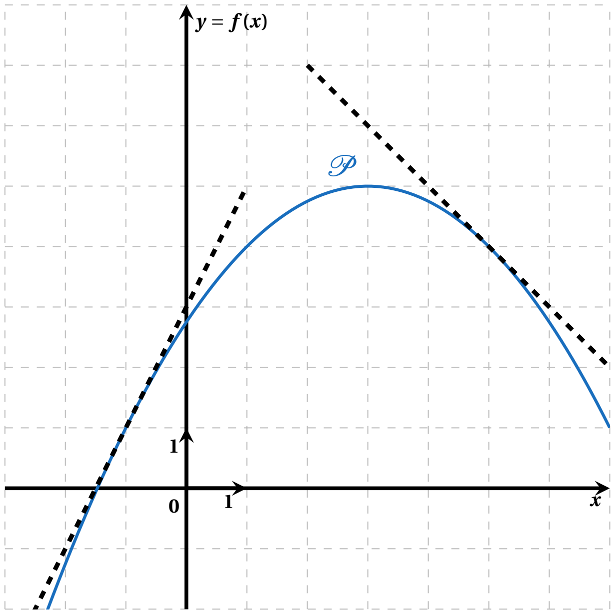
Exercices : Nombre dérivé et tangentes

Exercice 1 :

On considère la fonction f de degré 2 définie sur $[-2;8]$, dont la représentation graphique $\mathscr{P}$ dans un repère orthonormal est la portion de parabole ci-dessous.



1) Donner les valeurs de $f(5)$ puis de $f'(5)$.

....

2) Déterminer par lecture graphique le coefficient directeur de la tangente à la parabole $\mathscr{P}$ au point d'abscisse -1.

....

3) Quel est le nombre dérivé de f en 3 ?

....

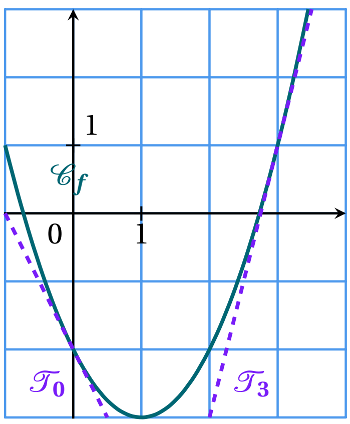
4) Quel est le **signe** de $f'(4)$?

....

5) Tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 0,5x + 4$.
$\mathscr{D}$ est-elle tangente à $\mathscr{P}$? ....

Exercice 2 :

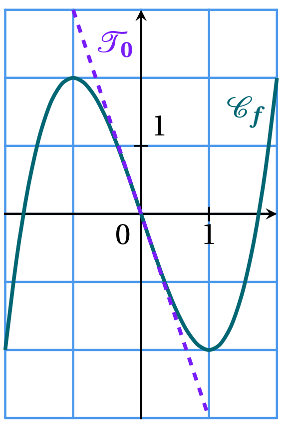
Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2\,;\,2]$, représentée ci-dessous.
$\mathscr{T}_1$ est la tangente à $\mathscr{C}_f$ en l'origine.



1) Que valent $f(0)$ et $f'(0)$?
2) En quelle(s) valeur(s) le nombre dérivé de la fonction est-il nul ?
3) Sur quel(s) intervalle(s) le nombre dérivé de la fonction est-il négatif ?
4) Sur quel(s) intervalle(s) le nombre dérivé de la fonction est-il positif ?
5) Quel est le lien entre le nombre dérivé et les variations de f ?

Exercice 3 :

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-2\,;\,2]$, représentée ci-dessous.
$\mathscr{T}_0$ est la tangente à $\mathscr{C}_f$ en l'origine.



1) Que valent $f(0)$ et $f'(0)$?
2) En quelle(s) valeur(s) le nombre dérivé de la fonction est-il nul ?
3) Sur quel(s) intervalle(s) le nombre dérivé de la fonction est-il négatif ?
4) Sur quel(s) intervalle(s) le nombre dérivé de la fonction est-il positif ?
5) Quel est le lien entre le nombre dérivé et les variations de f ?

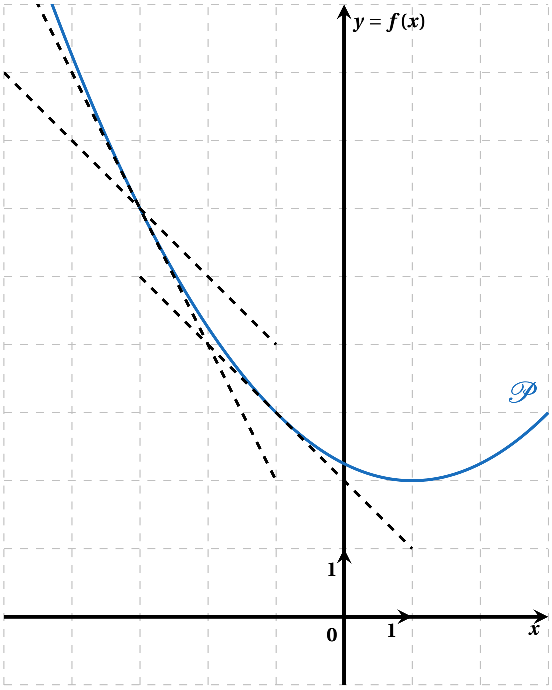
Exercice 4 :

Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 4x^2 - 6x + 7$.
2) $g(t) = t^2 - 4t + 9$.
3) $j(x) = \dfrac{-x^2 + 3x + 5}{4}$
4) $k(x) = 6x - 7$.

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie sur $[-5;3]$, dont la représentation graphique $\mathscr{P}$ dans un repère orthonormal est la portion de parabole ci-dessous.



1) a) Repasser en rouge la tangente à la parabole $\mathscr{P}$ au point d'abscisse -3.
   b) Déterminer par lecture graphique son coefficient directeur. ....
   c) Donner les valeurs de $f(-3)$ puis de $f'(-3)$.

   ....
2) Donner, par lecture graphique $f(-1)$ et $f'(-1)$.

   ....
3) a) Que pouvez-vous dire de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 ?

   ....
   b) Quel est alors le nombre dérivé de f en 1 ?

   ....

4. a) Quel est le **signe** de $f'(2)$? ....
   b) Est-il simple de déterminer la valeur de $f'(2)$? ....

5. La fonction f a pour expression $f(x) = 0,25\,x^2 - 0,5\,x + 2,25$.

   a) On a vu en activité que la **fonction dérivée** de $\boldsymbol{f(x) = a\,x^2 + b\,x + c}$ est $\boldsymbol{f'(x) = 2\,a\,x + b}$.
   Calculer la fonction dérivée de $f(x) = 0,25\,x^2 - 0,5\,x + 2,25$.

   ....
   b) Calculer $f'(2)$ et vérifier la cohérence du résultat avec la réponse de la question **4**.

   ....

Exercice 6 :

Une entreprise produit et vend de la colle liquide. On suppose que toute sa production est vendue.
En notant x le nombre de litres de colle produits, son bénéfice exprimé en milliers d'euros est donné par :

$$B(x) = -2x^2 + 420x - 7000$$

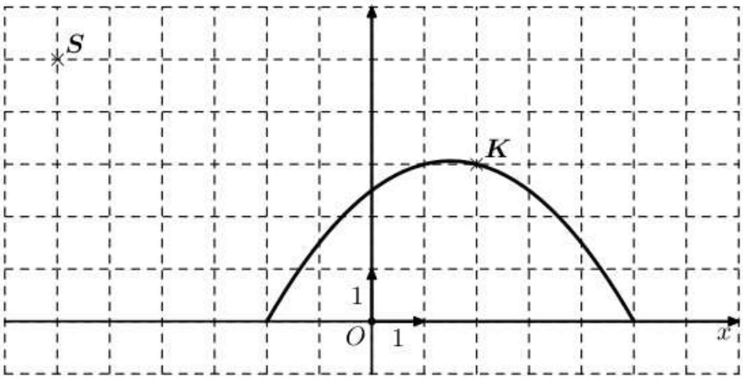
1) Calculer le bénéfice réalisé pour 180 litres de colle produits et vendus.
2) Calculer le bénéfice réalisé pour 200 litres de colle produits et vendus.
3) Sur quel intervalle de production l'entreprise réalise-t-elle des bénéfices ?
   (On utilisera un tableau de signes.)
4) Pour quelle quantité produite l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice maximal ?
   (On utilisera la dérivée et un tableau de variation.)

Exercice 7 :

Sur la figure ci-contre, l'arc de parabole représente une colline, le sol est symbolisé par l'axe des abscisses.

Le point $\boldsymbol{S}\,(-6\,;5)$ représente le soleil en train de se coucher.

L'arc de parabole est la représentation graphique de la fonction f définie pour $x \in [-2\,;5]$ par $\boldsymbol{f(x) = -0,25\,x^2 + 0,75\,x + 2,5}$.



Question : Comment déterminer la longueur de l'ombre de la colline ?

Rappel : Si on a $\boldsymbol{f(x) = a\,x^2 + b\,x + c}$, alors le coefficient directeur de la tangente à la courbe se calcule à l'aide de la **fonction dérivée** de f qui est alors $\boldsymbol{f'(x) = 2\,a\,x + b}$.

1) **Équation de la tangente $\boldsymbol{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point $\boldsymbol{K}$:**

   a) Calculer $f'(x)$ avec $f(x) = -0,25\,x^2 + 0,75\,x + 2,5$.

   ....

   ....

   b) En déduire $f'(2)$.

   ....

   c) Déterminer une équation de la tangente $\boldsymbol{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point K sous la forme $\boldsymbol{y = m\,x + p}$.

   ....

   ....

   ....

   d) Est-ce que le point $\boldsymbol{S}\,(-6\,;5)$ appartient à cette tangente $\boldsymbol{T}$?

   ....

   ....

2) Pour quelle valeur de x la droite $\boldsymbol{T}$ coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

   ....

   ....

   ....

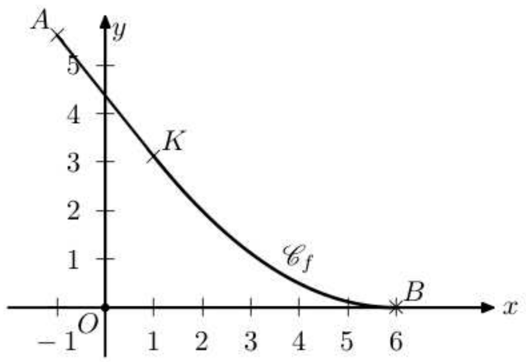
3) Quelle est alors la longueur au sol de l'ombre de la colline ?

   ....

Exercice 8 :

On modélise une rampe de skate board à l'aide d'un arc de parabole $\mathscr{C}_f$ qui représente la fonction f définie sur $[1\,;6]$ par $f(x)=0,125\,x^2-1,5\,x+4,5$

Cet arc de parabole est prolongé par le segment $[AK]$, tangent à $\mathscr{C}_f$ au point K.



BUT : Cette rampe est-elle sure pour les skateboard-ers ?

1) **Étude du raccord avec le sol**

   a) Que faut-il vérifier pour être certain que le raccordement est bon avec le sol ?

   b) Vérifier et expliquer.

2) **Étude du raccord en K**

   a) Que faut-il vérifier pour être certain que le raccordement est bon en K ?

   b) Vérifier et expliquer.

   c) La fin de la rampe se situe au point A qui est sur T, à l'abscisse -1.
   Quelle est la hauteur de cette rampe ?.

Exercice 9 :

Un exercice classique : Étudier complétement la fonction f définie par $f(x)=2x^2-13x+15$.

Étudier une fonction c'est donner un maximum d'informations sur cette fonction :

☞ Dommaine de définition
☞ Tableau de variation, maximum, minimum...
☞ Tableau de signe

Pour cela, on va utiliser la fonction dérivée. *(Il y a d'autres possibilités...)*

1) Donner la fonction dérivée f' de la fonction f.
2) Dresser le tableau de signe de f'.
3) En déduire le tableau de variation de f.
4) Quel est le minimum de la fonction f ?
5) Dresser le tableau de signe de la fonction f. *(Pensez à utiliser le discriminant...)*

Exercice 10 :

Étudier complétement la fonction g définie par $g(x)=3x^2+24x+48$.

(Vous pouvez utiliser les questions de l'exercice précédent.)