Exercices : Applications de la dérivation

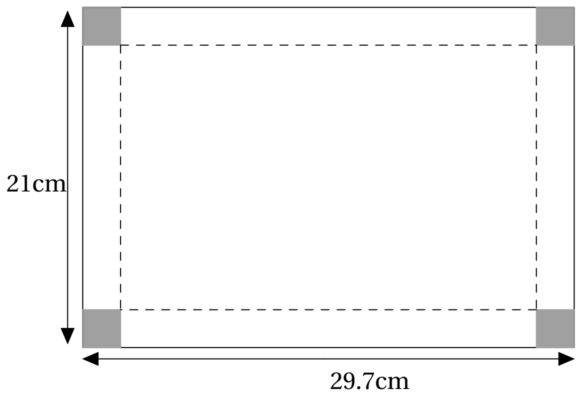
Activité 1 :

Périmètres et aires

1) De tous les rectangles de périmètre 30 cm, lequel a la plus grande aire ?
2) De tous les rectangles d'aire 25 cm^2, lequel a le plus petit périmètre ?

Activité 2 : *Mise en boîte*

À l'aide d'une feuille A4, on construit une boîte sans couvercle ayant la forme d'un parallélépipède rectangle en enlevant un carré à chaque coin puis en pliant suivant les pointillés.



1) Quelles sont les valeurs possibles du côté d'un carré ?
2) Comment découper la boîte pour obtenir un volume maximum ?
3) Comment découper la boîte pour obtenir un volume de un litre ?

Exercice 3 :

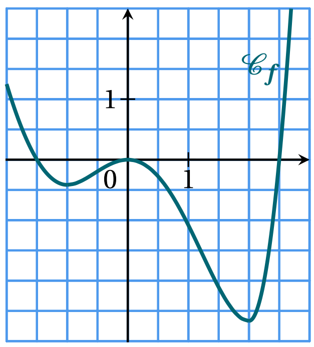
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont on donne le tableau de signes de $f'(x)$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

1) Donner le sens de variation de f.
2) En quelle valeur(s) f admet-elle un maximum ou un minimum local ?

Exercice 4 :

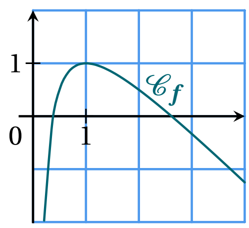
Soit f une fonction dérivable sur $[-2\,;\,3]$ dont on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ ci-dessous.



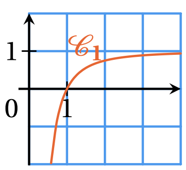
1) Résoudre graphiquement les inéquations :
   a) $f(x) > 0$ b) $f(x) < 0$
   c) $f'(x) > 0$ d) $f'(x) < 0$
2) Existe-t-il un lien entre le signe de $f(x)$ et celui de $f'(x)$?
3) Résoudre graphiquement les équations :
   a) $f(x) = 0$ b) $f'(x) = 0$

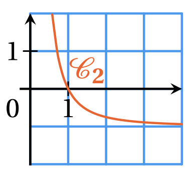
Exercice 5 :

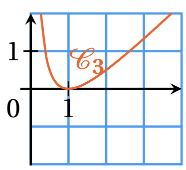
On considère une fonction f dont on donne la représentation graphique ci-dessous.



Parmi les trois courbes suivantes, laquelle est susceptible de représenter f' ?

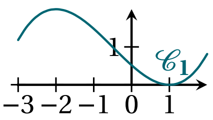


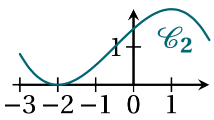


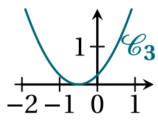


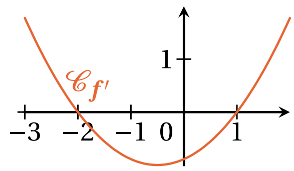
Exercice 6 :

On donne ci-dessous les représentations de trois fonctions f_1, f_2 et f_3.









Parmi ces trois fonctions, laquelle est susceptible d'avoir pour dérivée la fonction représentée ci-contre ?

Exercice 7 :

Une entreprise fabrique des biens. On note q la quantité de biens produits, $C(q)$ le coût de production de q unités et $R(q) = qp$ la recette issue de la vente de ces q unités, au prix de p € l'unité. Pour finir, on note $\pi(q) = R(q) - C(q)$ le profit réalisé.

On donne $C(q) = 0,01q^3 - 0,135q^2 + 0,6q + 15$ milliers d'euros et $p = 2,7$ milliers d'euros.

1) Déterminer graphiquement la quantité q_0 réalisant le profit maximal.
2) Retrouver ce résultat algébriquement.

Exercice 8 :

Dans chaque cas, f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Calculer $f'(x)$.

1) f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{2} - 3x^2 + \dfrac{5}{x}$
2) f est définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.
3) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-2x)\left(0,5x^2+1\right)$

Exercice 9 :

Déterminer l'extremum de ces fonctions du second degré, ainsi que la valeur de la variable pour laquelle cet extremum est atteint ; préciser s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

$f(x) = 2x^2 + 3x$	$h(x) = 2(x-3)^2 + 8$
$g(x) = x^2 + 5$	$k(x) = 6x^2 - 3x + 8$

Exercice 10 :

Partie A : Étude d'une fonction polynôme de degré 2

On note C_f la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-3,4]$ par $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1$

1) a) Déterminer f', la fonction dérivée de f.
   b) Établir le tableau de variation de f sur $[-3;4]$.
2) Déterminer une équation de T, la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse -1.

Partie B : Étude d'une fonction polynôme de degré 3

On considère C_g, la courbe représentative de la fonction g définie sur $[-3,4]$ par $g(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 1$

1) a) Déterminer la fonction dérivée g'.
   b) Étudier le signe de $g'(x)$. En déduire le tableau de variation de g sur $[-3,4]$.
   c) Combien l'équation $g(x) = 0$ admet-elle de solution(s) sur $[-3,4]$ (Justifier).
   On note α la plus grande de ces solutions.
   d) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
2) Déterminer, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection des courbes C_f et C_g.

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5x+3}{x^2-x+1}$. On note f' sa fonction dérivée.

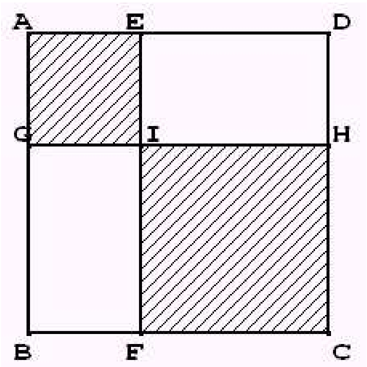
1) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
2) En déduire le tableau des variations de la fonction f. (*Indiquer dans le tableau de variation, les valeurs exactes des extremum*).

Exercice 12 :

Le cout total, en euros, de production d'un produit est donné par $C(x) = 0.01x^2 + 0.4x + 9$ avec $x \in [0\,;\,100]$ ou x est la quantité produite. On se limite à une production de moins de 100 produits.
Le prix de vente unitaire est de 1.15 euros.

1) Montrer que la fonction cout est croissante sur $[0\,;\,100]$
   pour quelle quantité le cout de production dépasse les 86 euros.
2) Exprimer en fonction de x
   - la fonction recette $R(x)$
   - le fonction bénéfice $B(x)$
3) Étudier le sens de variation de la fonction B. En déduire la ou les quantités à produire pour réaliser un bénéfice maximal.
4) Étudier le signe de $B(x)$. Pour quelles quantités produites est-on bénéficiaire ?
5) Le but de cette question est de montrer que le cout moyen minimum est atteint pour une production de 30 objets.
   a) Calculer $C(30)$, en déduire le cout moyen de production pour cette quantité.
   b) Étudier le signe de $C(x) - x$. En déduire que $C(x) \geqslant x$ et résoudre l'équation $C(x) = x$.
   c) Quel est le cout moyen de production minimum ?

Exercice 13 :



$ABCD$ est un carré de côté 5 cm. E est un point du segment $[AD]$.
G est le point du segment $[AB]$ tel que $AE = AG$.
La parallèle à (AB) passant par E coupe $[BC]$ en F.
La parallèle à (AD) passant par G coupe $[DC]$ en H.
(GH) et (EF) se coupent en I. On pose $AE = x$.
On étudie l'aire notée $A(x)$ de la partie hachurée lorsque E se déplace sur $[AB]$.

1) Quelles sont les valeurs possibles de x ?
2) Démontrer que $A(x) = 2x^2 - 10x + 25$ pour tout x.
3) Quel est le minimum de A ?

Exercice 14 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{5x}{x+2}$.

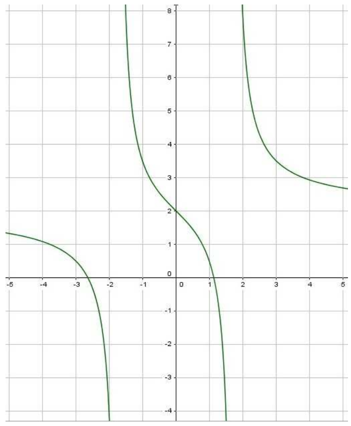
1) Justifier pourquoi f est définie et dérivable sur $]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;\,+\infty[$.
2) Établir le tableau des variations de f sur $]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;\,+\infty[$.

Exercice 15 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+2}$.

1) Justifier pourquoi f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) Établir le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.

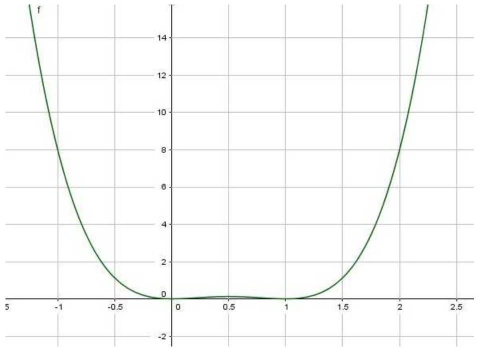
Exercice 16 :



On considère ci-contre une partie de la courbe C_f de la fonction f définie par $f(x) = 2 + \dfrac{3x}{x^2 - 3}$.

1) Préciser le domaine de définition de f.
2) Conjecturer les variations de f.
3) Valider ou infirmer cette conjecture.

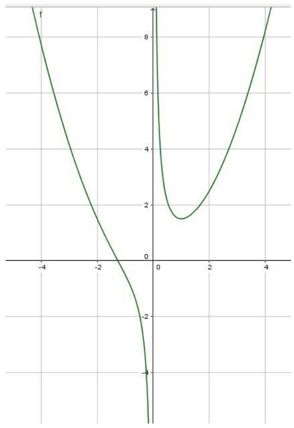
Exercice 17 :



On considère ci-contre une partie de la courbe C_f de la fonction f définie par $f(x) = 2x^2(x-1)^3$.

1) Préciser le domaine de définition de f.
2) Conjecturer les variations de f.
3) Valider ou infirmer cette conjecture.

Exercice 18 :

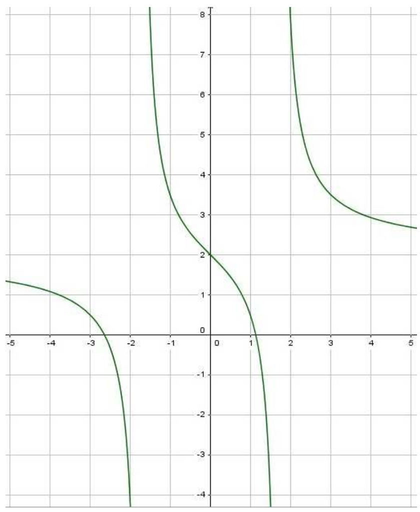


On considère ci-contre une partie de la courbe C_f de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$.

1) Préciser le domaine de définition de f.
2) Conjecturer les variations de f.
3) Valider ou infirmer cette conjecture.

Aide : Au moment d'étudier le signe de $f'(x)$, on pourra démontrer l'égalité $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$.

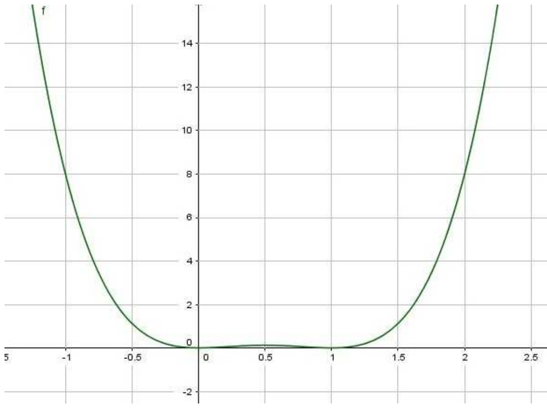
Exercice 19 :



On considère ci-contre une partie de la courbe C_f de la fonction f définie par $f(x) = 2 + \dfrac{3x}{x^2 - 3}$.

1) Préciser le domaine de définition de f.
2) Conjecturer les variations de f.
3) Valider ou infirmer cette conjecture.

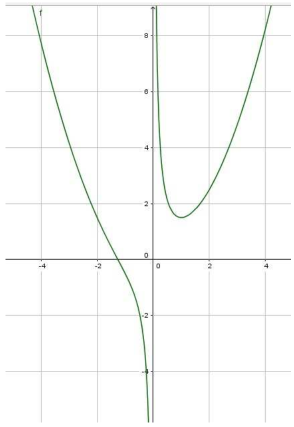
Exercice 20 :



On considère ci-contre une partie de la courbe C_f de la fonction f définie par $f(x) = 2x^2(x-1)^2$.

1) Préciser le domaine de définition de f.
2) Conjecturer les variations de f.
3) Valider ou infirmer cette conjecture.

Exercice 21 :



On considère ci-contre une partie de la courbe C_f de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$.

1) Préciser le domaine de définition de f.
2) Conjecturer les variations de f.
3) Valider ou infirmer cette conjecture.

Aide : Au moment d'étudier le signe de $f'(x)$, on pourra démontrer l'égalité $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$.