Exercices : Fonctions du second degré

Exercice 1 :

Pour chacune des fonctions, déterminer en quelle valeur elle admet un minimum ou un maximum :

1) $-2x^2$
2) $f(x) = 2(x-1)^2 + 2$
3) $g(x) = -7(x+3)^2 - 5$
4) $h(x) = -\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + 2$

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -7(x-5)^2 + 7$.
Sans calculatrice, classer dans l'ordre croissant :

- $f(5,6)$
- $f(6,2)$
- $f(9,8)$
- $f(2,8)$
- $f(4,9)$
- $f(-1,2)$

Exercice 3 :

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5(x+2)^2 - 3$.

1) Lydie affirme sans faire aucun calcul que $f(-3) = f(-1)$. Comment fait-elle ?
2) Sans calcul, trouver une autre égalité avec deux autres nombres.

Exercice 4 :

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)^2 - 9$.

1) Donner la forme factorisée de $f(x)$.
2) Donner sa forme développée.
3) Quels sont les antécédents de 0 par f ?

Exercice 5 :

Déterminer les variations de la fonction polynôme du second degré h qui vérifie :

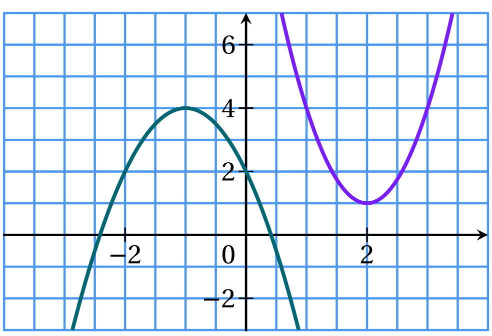
- $h(3) = 6$
- $h(6) = 2$
- $h(9) = 6$

Donner une epression algébrique de h.

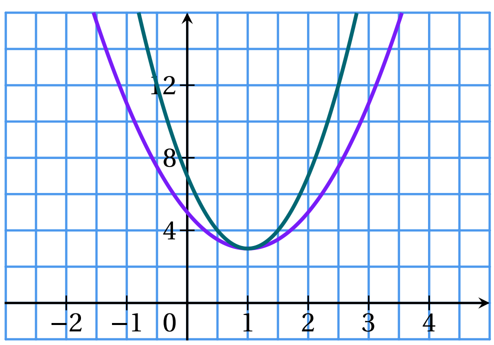
Exercice 6 :

Associer chaque courbe à la bonne fonction dans chacun des cas :

1) $f(x) = -2(x+1)^2 + 4$
   $g(x) = 3(x-2)^2 + 1$



2) $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$
   $g(x) = 4(x-1)^2 + 3$



Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$

1) Démontrer que $f(x)$ peut s'écrire : $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$ pour tout réel x.
2) En déduire le tableau des variations de f. Préciser la valeur de l'extremum de f

Exercice 8 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -(x-2)^2 + 5$

1) Déterminer les variations de f et son extremum.
2) Tracer la courbe C_f à la calculatrice sur l'intervalle $[-2; 6]$
3) Déterminer algébriquement la valeur exacte des solutions de l'équation $f(x) = 2$.
   Vérifier graphiquement.

Exercice 9 :

Voici une fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 - 4x + 7$

1) Prouver que $f(x) = -(x+2)^2 + 11$ pour tous réels.
2) Résoudre algébriquement les équations $f(x) = 7$ et $f(x) = 12$. *(Vérifier sur le graphique.)*
3) Décrire les variations de f. Les démontrer.

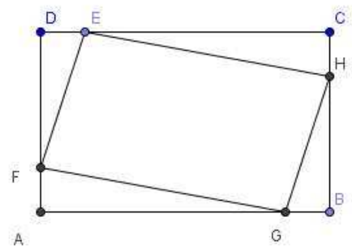
Exercice 10 :

Voici une fonction du second degré : $g(x) = -2x^2 - 5x + 8$

1) Donner l'ensemble de définition de g.
2) Prouver que $g(x) = 2(x - 1.25)^2 + 4.875$ pour tous réels.
3) Résoudre algébriquement les équations $g(x) = 8$ et $g(x) = 5$.
   (Vérifier sur le graphique de votre calculatrice.)
4) Décrire les variations de g. Les démontrer.

Exercice 11 :

Un rectangle $ABCD$ est tel que $AB = 8$ et $BC = 5$.
F est un point de $[AD]$.
On construit E, G et H tels que :
$E \in [CD]$, $G \in [AB]$ et $H \in [BC]$ et $ED = AF = GB = CH$.



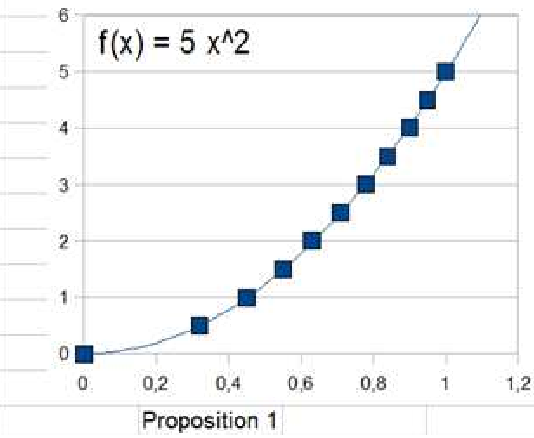
Le but de l'exercice est de déterminer comment varie l'aire du quadrilatère $EFGH$ lorsque F se déplace sur $[AD]$.

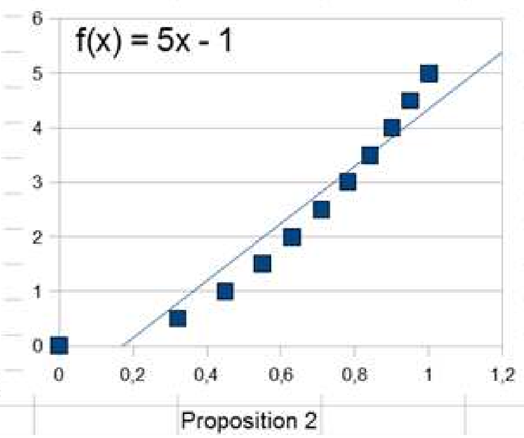
1) On pose $x = AF$. Quelles sont les valeurs possibles de x ?
2) On nomme f(x) l'aire du quadrilatère $EFGH$. Démontrer que $f(x) = 2x^2 - 13x + 40$ pour tout $x \in [0; 8]$.
3) Démontrer que $f(x) = 2\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 + \frac{151}{8}$ pour tout x du domaine choisi.
4) Utiliser alors la formule précédente pour donner la réponse au problème.

Exercice 12 :

On lâche une petite bille en acier d'une hauteur de 15 m. Avec des capteurs placés à intervalles réguliers, on a mesuré la distance parcourue en chute libre depuis le lâcher de la bille en fonction du temps écoulé. Les données obtenues par les capteurs pendant la première seconde de la chute sont relevées dans le tableau et représentés graphiquement par le nuage de points.

t (en seconde)	d (en mètres)
0	0
0,32	0,5
0,45	1
0,55	1,5
0,63	2
0,71	2,5
0,78	3
0,84	3,5
0,9	4
0,95	4,5
1	5



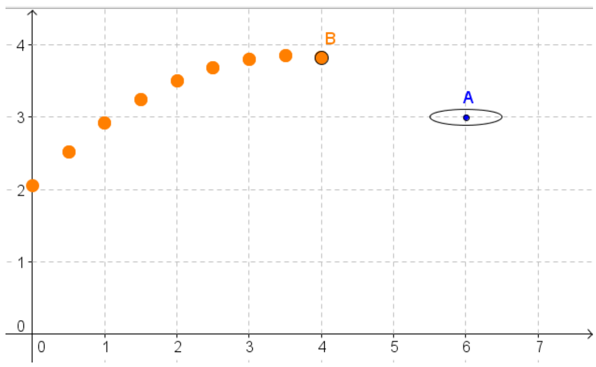


Dans la proposition 1, on tente d'approcher le nuage de point par une parabole. Dans la proposition 2, on tente d'approcher le nuage de points par une droite.

1) Parmi ces deux courbes, laquelle est le meilleur modèle, et pourquoi ?
2) Utiliser la formule qui a été choisie pour prévoir :
   a) quelle distance la bille aura parcourue en 1,5 secondes si la chute se poursuivait.
   b) au bout de combien de temps la bille aura parcouru 5 mètres, 20 mètres, 25 mètres.

Exercice 13 :

Lors d'un lancer franc, on a repéré à l'aide de photos (mode rafale) la position d'un ballon de basket à différents instants :



Abscisse x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
Ordonnée y	2.056 m	2.522 m	2.918 m	3.244 m	3.501 m	3.687 m	3.803 m	3.849 m	3.525 m

1) Expliquer pourquoi on peut proposer un modèle de la trajectoire du type $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. Quelles valeurs choisir pour les coefficients a, α et β ?
2) Expliquer pourquoi on peut considérer que le panier est réussi si $2.9 < f(x) < 3.1$.
3) A votre avis, le panier sera-t-il réussi ?

Exercice 14 :

On considère g, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 9$.
Exprimer g sous forme factorisée puis dresser le tableau de signes de g.

Exercice 15 :

Un artisan fabrique entre 0 et 60 vases par jour et estime que le coût de production de x vases est modélisé par la fonction C donnée par $C(x) = x^2 - 10x + 500$. On note $R(x)$ la recette, en euros, correspondant à la vente de x vases fabriqués. Un vase est vendu 50 €.

1) Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
2) Calculer le coût, la recette et le bénéfice réalisée lorsque l'artisan vend 50 vases.
3) Vérifier que le bénéfice, en euros, réalisé par l'artisan est donné par la fonction B dont l'expression est : $B(x) = -x^2 + 60x - 500$.
4) a) Développer l'expression : $-(x-30)^2 + 400$.
   b) En déduire le nombre de vases à vendre pour réaliser un bénéfice maximum.

Exercice 16 :

On considère g, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 9$.
Exprimer g sous forme factorisée puis dresser le tableau de signes de g.

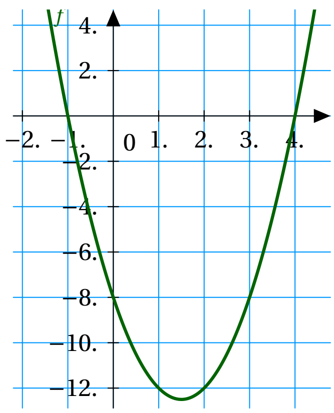
Exercice 17 :

Établir les tableaux de signes des fonctions :

1) $h(x) = (-2x+3)(-3x-5)$
2) $u(x) = (2x+14)(6x+24)$
3) $v(x) = (5x-65)(7-2x)$
4) $w(x) = (-3x-72)(-4x-96)$

Exercice 18 :

Soit f une fonction du second degré dont la courbe représentative est donnée ci-contre.



1) Trouver les trois nombres entiers cachés sous les tâches d'encre :

$$f(x) = \quad x^2 \quad x \quad$$

2) Dresser le tableau de signes puis le tableau de variation de cette fonction.