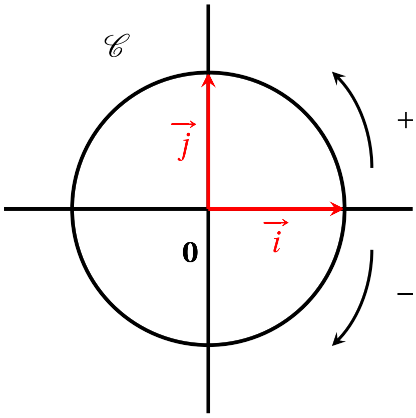
Trigonométrie

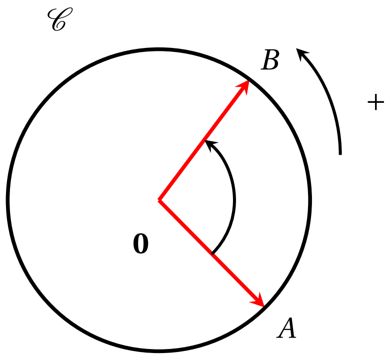
A) Le radian : une nouvelle unité d'angle



Définition :

Soit $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé. On appelle **cercle trigonométrique** un cercle de centre O, de rayon 1 muni d'un sens direct (le sens inverse des aiguilles d'une montre).

La longueur de ce cercle est de 2π.



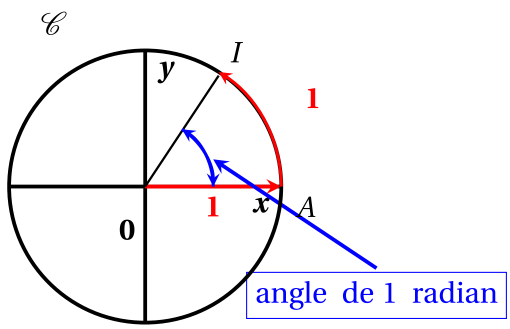
Définition :

Soit A et B deux points du cercle trigonométrique.

On note $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right)$ l' angle orienté qui a pour mesure celle de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

La mesure d'un arc est une longueur qui ne peut donc pas correspondre à la même mesure en degrés.

D'où l'utilisation d'une nouvelle unité d'angle : le **radian**.



Définition :

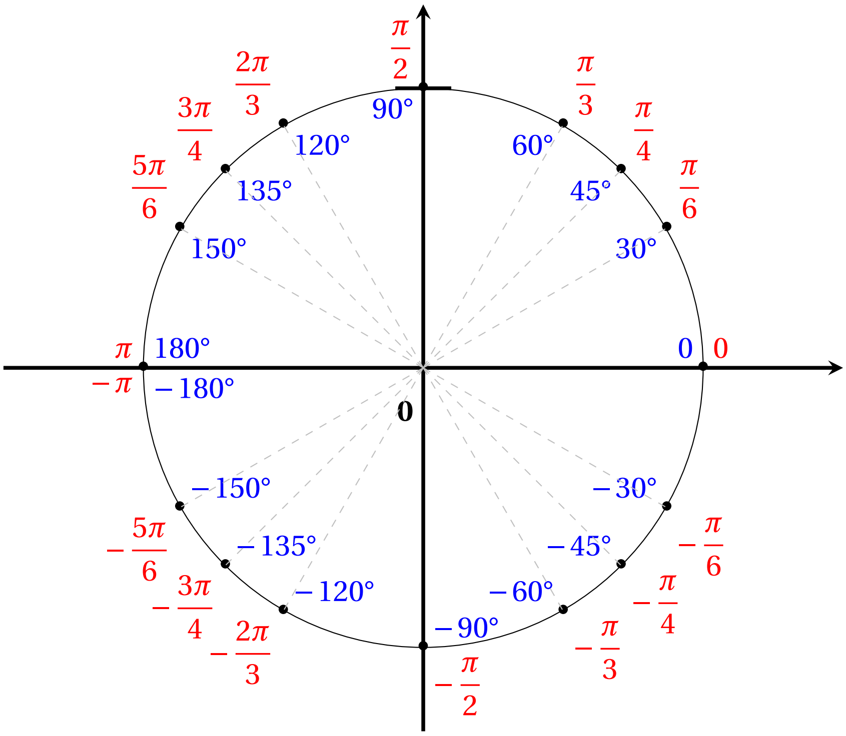
Le radian est la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OI}\right)$,

avec I sur le cercle tel que l'arc $\overset{\frown}{AI}$ mesure 1.

Sachant que le périmètre d'un cercle de rayon 1 est 2π, alors on peut trouver facilement la correspondance entre les deux unités d'angle.

Conversion : Degrés - Radians

Angles en degrés	Angles en radians
360	2π
180	π
90	$\frac{\pi}{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$
30	$\frac{\pi}{6}$
0	0



Enroulement sur $\mathscr{C}$:

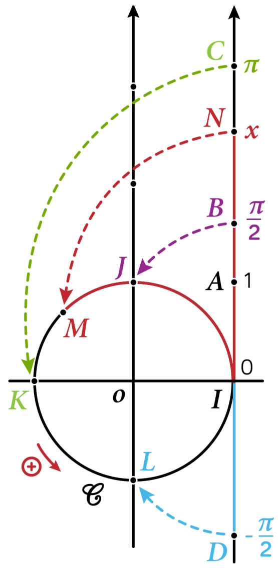
Soit (OA) la tangente au cercle trigonométrique au point I avec A tel que $OA = 1$.

(A a pour coordonnées $(1;1)$ dans le repère $(O; I, J)$)

(I, A) est un repère de la droite (OA).

Par le procédé d'enroulement de la droite (OA) autour du cercle :

* à tout point de (OA), d'abscisse x, correspond un unique point M du cercle ;
* tout point du cercle est associé à une infinité de points de (OA) : tous ceux qui peuvent être obtenus à des tours entiers de cercle près.



Définition :

Tout angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}\right)$ possède :

- une infinité de mesures, différant d'un multiple entier de 2π (c'est à dire un tout entier du cercle).
- une seule mesure comprise dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$: **sa mesure principale**.

Exemples :

- Soit M le point du cercle tel que $\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}\right)$ mesure $\frac{13\pi}{2}$ radians, soit $\frac{\pi}{2}$ en mesure principale.

  En effet, $\frac{13\pi}{2} = \frac{12\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 6\pi + \frac{\pi}{2} = 3 \times 2\pi + \frac{\pi}{2} = 3\text{tours complets} + \frac{\pi}{2}$ avec $\frac{\pi}{2} \in]-\pi;\pi]$

- Soit N le point du cercle tel que $\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{ON}\right)$ mesure $\frac{-11\pi}{3}$ radians, soit $\frac{\pi}{3}$ en mesure principale.

  $\frac{-11\pi}{3} = \frac{-12\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = -4\pi + \frac{\pi}{3} = -2 \times 2\pi + \frac{\pi}{3} = 2\text{tours complets} + \frac{\pi}{3}$ avec $\frac{\pi}{3} \in]-\pi;\pi]$

B) Le sinus et le cosinus

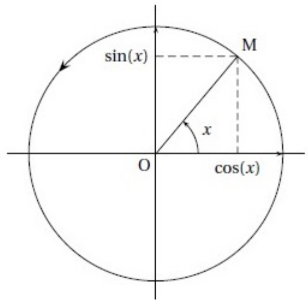
1) Définition

Définition :

Soit $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ un repère orthonormé et (C) le cercle trigonométrique.

Le cosinus de x est l'abscisse du point M du cercle.

Le sinus de x est l'ordonnée du point M du cercle.



Théorème : Pour tout réel x

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

2) Les angles associés

Les différentes symétries du cercle (en particulier celle par rapport à l'axe des cosinus et l'axe des sinus) nous permettent de retrouver certaines valeurs :

Formule 1

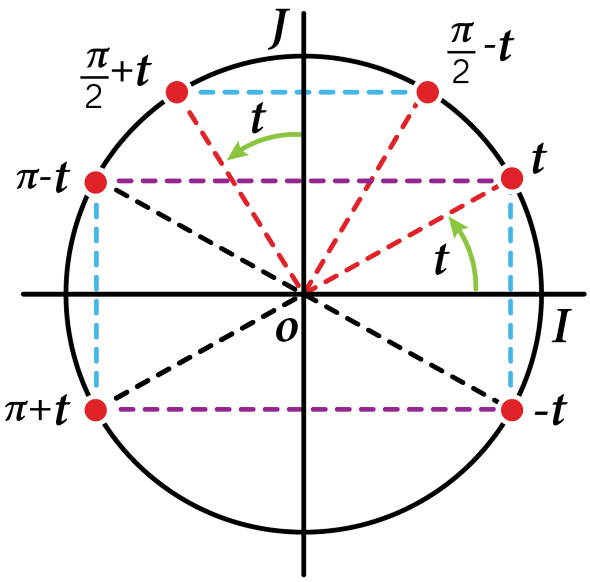
$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$$

Formule 2

$$\begin{cases} \cos(x+\pi) = -\cos x \\ \sin(x+\pi) = -\sin x \end{cases}$$

Formule 3

$$\begin{cases} \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x \end{cases}$$



Formule 4

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x \end{cases}$$

Formule 5

$$\begin{cases} \cos(\pi-x) = -\cos x \\ \sin(\pi-x) = \sin x \end{cases}$$

Formule 6

$$\begin{cases} \cos(x+2k\pi) = \cos x \\ \sin(x+2k\pi) = \sin x \end{cases}$$

Exemples : $cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = cos\left(\pi+\frac{2\pi}{3}\right) = -cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

C) Les fonctions trigonométriques

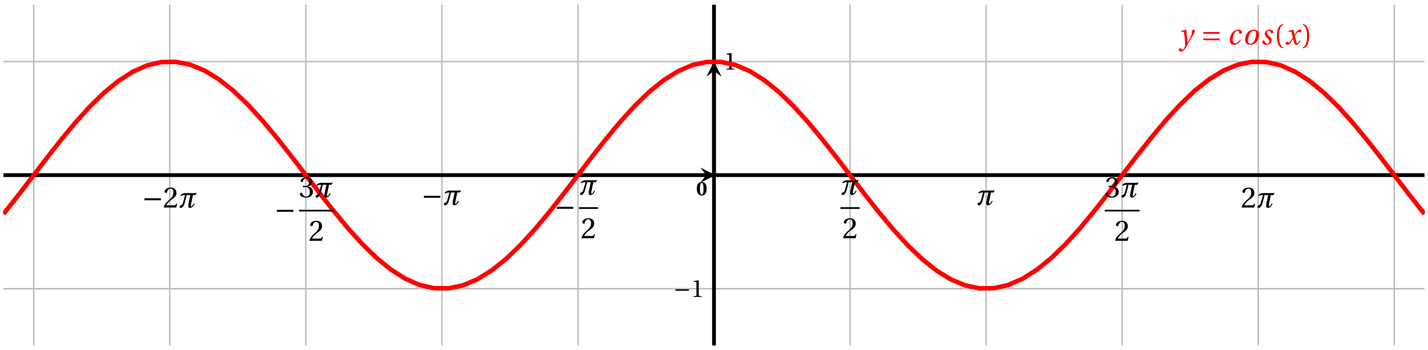
1) Définition et courbe

Définition :

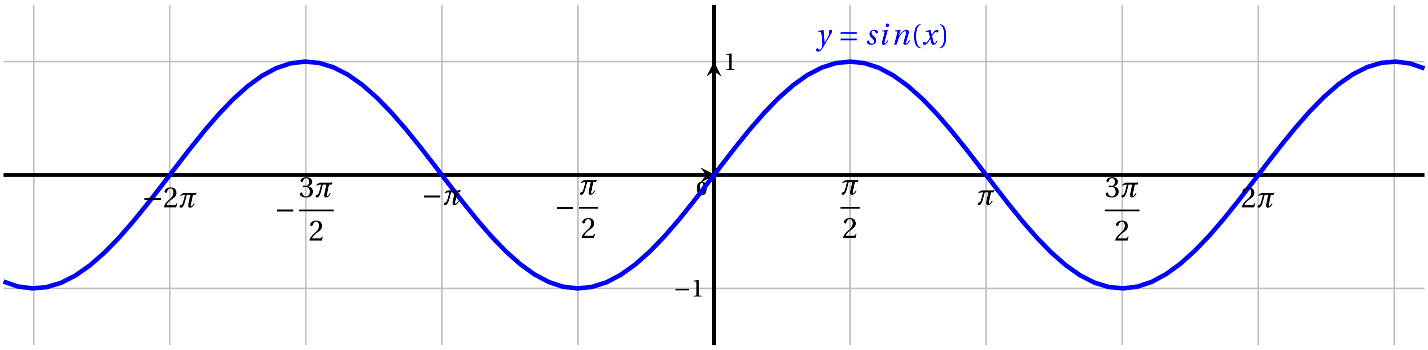
- La fonction cosinus est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout réel x, associe $\cos(x)$.
- La fonction sinus est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout réel x, associe $\sin(x)$.

Représentations graphiques

La fonction cosinus :



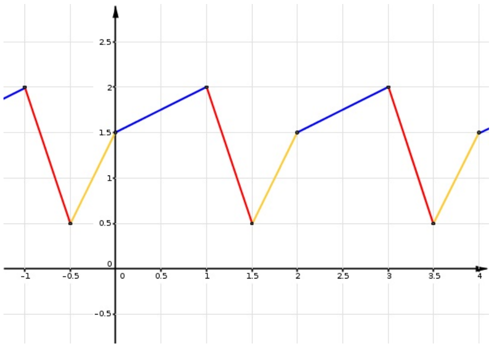
La fonction sinus :



2) Propriétés

La périodicité

- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. f est *périodique de période* T signifie que, pour tout x réel, $f(x+T) = f(x)$. On dit aussi que f est T-périodique.
- *La période* est le plus petit réel strictement positif vérifiant la relation précédente.



Remarque :

Connaitre la période d'une fonction permet de limiter l'étude à un intervalle d'amplitude T. En effet, graphiquement, dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$, la courbe est invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$.

La parité

1) Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$. f est **paire** signifie que :

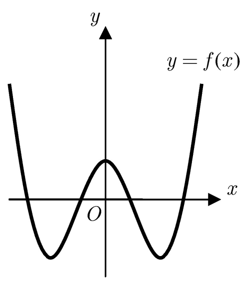
• l'ensemble $\mathscr{D}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et • pour tout x de $\mathscr{D}$, $f(-x) = f(x)$.

2) Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$. f est **impaire** signifie que :

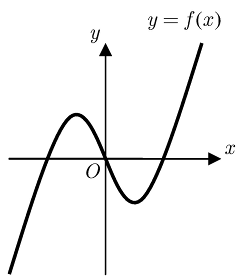
• l'ensemble $\mathscr{D}$ est symétrique par rapport à 0 et • pour tout x de $\mathscr{D}$, $f(-x) = -f(x)$.

Théorème :

- La représentation graphique d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



- La représentation graphique d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Remarque :

1) Déterminer la parité d'une fonction revient à déterminer si elle est impaire, paire ou ni l'une ni l'autre.

2) Connaitre la parité d'une fonction permet de réduire l'ensemble d'étude aux nombres positifs (ou bien aux négatifs) et de compléter par symétrie.

2) Propriétés des fonctions trigonométriques

Propriétés de la fonction cosinus :

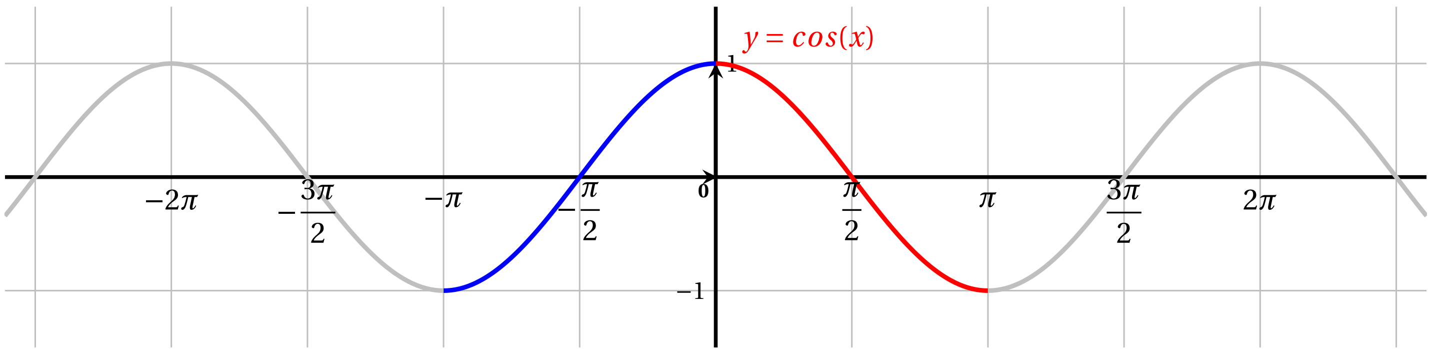
- La fonction *cosinus* est périodique de période 2π. En effet, $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$
- La fonction *cosinus* est paire. En effet, pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$
- La courbe représentative de la fonction cos est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Remarques :

La **fonction cosinus** étant 2π-périodiques, il suffit de tracer sa courbe sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi; \pi]$.

De plus, **la fonction cosinus** étant paire, une étude sur $[0; \pi]$ est suffisante.

Il suffit alors de compléter par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées puis par translation.



Propriétés de la fonction sinus :

- La fonction *sinus* est impaire. En effet, pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$
- La courbe représentative de la fonction sin est donc symétrique par rapport à l'origine.
- La fonction *sinus* est périodique de période 2π. En effet, $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$.

Remarques :

La **fonction sinus** étant 2π-périodiques, il suffit de tracer sa courbe sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi; \pi]$.

De plus, **la fonction sinus** étant impaire, une étude sur $[0; \pi]$ est suffisante.

Il suffit alors de compléter par symétrie par rapport au point O puis par translation.