Parcours 5 : Comment optimiser une quantité ?

(un périmètre,une aire, un coût, un bénéfice, . . .)

Étude 1 : De tous les rectangles de périmètre 30 cm, lequel a la plus grande aire ?

Exercices techniques :

Exercice 1

Déterminer l'extremum de ces fonctions du second degré, ainsi que la valeur de la variable pour laquelle cet extremum est atteint ; préciser s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

1) $f(x) = -2x^2$

2) $f(x) = 2(x-1)^2 + 2$

3) $f(x) = x^2 + 5$

4) $f(x) = -7(x+3)^2 - 5$

5) $f(x) = -\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + 2$

Exercice 2

Ci-dessous des fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Déterminer leurs variations et extrémum.

1) $f(x) = 2x^2 + 3x$ **2)** $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$ **3)** $f(x) = -6x^2 - 12x + 8$

Exercices de recherche :

Exercice 3

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5(x+2)^2 - 3$.

1) Lydie affirme sans faire aucun calcul que $f(-3) = f(-1)$. Comment fait-elle ?

2) Sans calcul, trouver une autre égalité avec deux autres nombres.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -7(x-5)^2 + 7$

Sans calculatrice, classer dans l'ordre croissant : $f(5{,}6)$ $f(9{,}8)$ $f(54{,}9)$ $f(6{,}2)$ $f(2{,}8)$ $f(-1{,}2)$

Exercice 5

$ABCD$ est un carré de côté 5 cm. G est un point du segment $[AB]$.

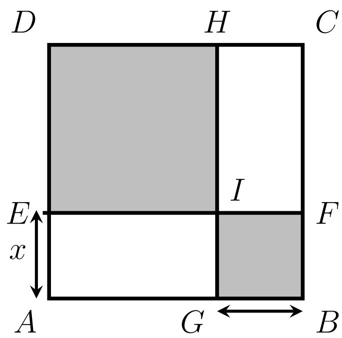
E est le point du segment $[AD]$ tel que $AE = GB$.

La parallèle à (AB) passant par E coupe $[BC]$ en F.

La parallèle à (AD) passant par G coupe $[DC]$ en H.

(GH) et (EF) se coupent en I. On pose $AE = x$.

On étudie l'aire notée $A(x)$ de la partie hachurée lorsque E se déplace sur $[AB]$.



1. Quelles sont les valeurs possibles de x ?

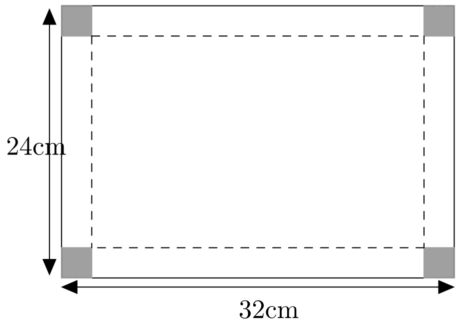
2. Démontrer que $A(x) = 2x^2 - 10x + 25$ pour tout x. Quel est le minimum de A ?

Parcours 5 : Comment optimiser une quantité ?

(un périmètre,une aire, un coût, un bénéfice, . . .)

Étude 2 :

À l'aide d'une feuille de dimension 24×32, on construit une boîte sans couvercle ayant la forme d'un parallélépipède rectangle en enlevant un carré à chaque coin puis en pliant suivant les pointillés.



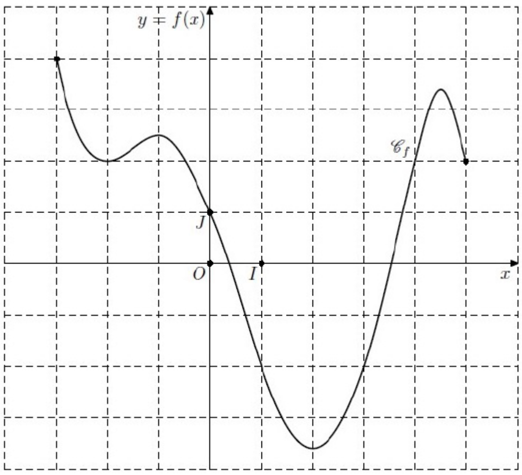
1) Quelles sont les valeurs possibles du côté d'un carré ?

2) Comment découper la boîte pour obtenir un volume maximum ?

Exercices de cours (minimum exo 6 à 9)

Exercice 6

Voici la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f :



1) Déterminer la valeur du maximum de la fonction sur $[-3\,;\,5]$. Pour quelle valeur de x est-il atteint ?

2) Déterminer la valeur du minimum de la fonction sur $[-3\,;\,5]$. Pour quelle valeur de x est-il atteint ?

3) Déterminer la valeur du maximum de la fonction sur $[0\,;\,5]$. Pour quelle valeur de x est-il atteint ?

4) Déterminer la valeur du minimum de la fonction sur $[-3\,;\,0]$. Pour quelle valeur de x est-il atteint ?

Exercice 7

Variations de fonctions de base :

1. Rappeler les variations des fonctions définies par :

- $f(x) = 2x - 3$

x	$-\infty$	$+\infty$
Var de f		

- $g(x) = -5x + 8$

x	$-\infty$	$+\infty$
Var de g		

- $h(x) = x^2$

x	$-\infty$	$+\infty$
Var de h		

2. Rappeler les variations des fonctions définies par :

- $f(x) = 2(x-1)^2 - 3$

x	$-\infty$	$+\infty$
Var de f		

- $g(x) = -5(x+3)^2 + 8$

x	$-\infty$	$+\infty$
Var de g		

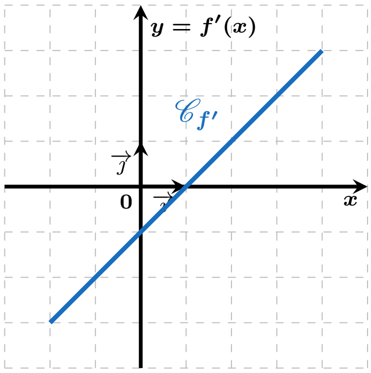
- $h(x) = x^2 - 10$

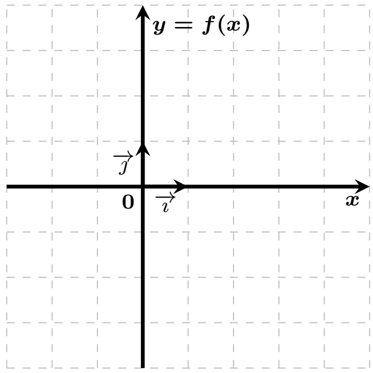
x	$-\infty$	$+\infty$
Var de h		

Exercice 8

On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f' sur $[-2;4]$.

En déduire les variations de f puis donner une allure possible pour $\mathscr{C}_f$ dans le repère de droite.





Exercice 9

Dans chaque cas, f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle donné. Calculer $f'(x)$.

1) $f(x) = x^2\left(x^2 - 3\,x + 5\right)$ sur $\mathbb{R}$

2) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-1}$ sur $]1\ ;\ +\infty[$.

3) $f(x) = (1-2x)\left(3x^2+1\right)$ sur $\mathbb{R}$

4) $h(x) = \dfrac{-7}{3\,x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 10

Soit f la fonction définie et dérivable sur $I = [-2;3]$ par $f(x) = -\,x^3 + 3\,x - 1$.

1) Étudier les variations de f sur I.

2) En déduire les extrema de f sur I.

Exercice 11

Soit $f(x) = -x^2 + 3x - 10$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Déterminer $f'(1)$. En déduire les variations de la fonction f autour du point d'abscisse 1.

2) Même questions pour $f'(-2)$, pour $f'(1{,}5)$.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère et T_1 est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

1) Déterminer une équation de la tangente T_1.

2) On considère la fonction g définie sur$\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (4x - 4)$.

- **a)** Dresser le tableau de variation de g.
- **b)** Calculer $g(-3)$ et le faire apparaître dans le tableau de variation.
- **c)** En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x.

3) En déduire la position relative de T_1 par rapport à $\mathscr{C}_f$.

Exercices internes aux mathématiques (minimum exo 12 et 15)

Exercice 13

Partie A : Étude d'une fonction polynôme de degré 2

On note C_f la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-3,4]$ par $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1$

1) **(a)** Établir le tableau de variation de la fonction f. Justifier.

(b) Retrouver les variations de f par le calcul et la recherche du signe de sa dérivée f'.

2) Déterminer une équation de T, la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse -1.

Partie B : Étude d'une fonction polynôme de degré 3

On considère C_g, la courbe représentative de la fonction g définie sur $[-3,4]$ par$g(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 1$

1) **(a)** Déterminer la fonction dérivée g'.

(b) Étudier le signe de $g'(x)$. En déduire le tableau de variation de g sur $[-3{,}4]$. **Voir cours**

(c) Combien l'équation $g(x) = 0$ admet-elle de solution(s) sur $[-3,4]$ (Justifier).

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5x+3}{x^2-x+1}$. On note f' sa fonction dérivée.

1) Calculer $f'(x)$. **Voir formule de dérivation**

2) En déduire le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 15

On considère ci-contre une partie de la courbe C_f de la fonction f définie par $f(x) = 2 + \dfrac{3x}{x^2-4}$.

1) Préciser le domaine de définition de f.

2) Conjecturer les variations de f à l'aide de la calculatrice.

3) Valider ou infirmer cette conjecture.

Exercice 16

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3\,x^2 + 2$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Donner une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ privé de $\frac{2}{3}$ par $f(x) = \dfrac{a\,x^2+b}{3\,x-2}$, où a et b sont des réels.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

Déterminer a et b pour que $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1 et admette une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

Exercices avec contexte (minimum exo 18 à 20)

Exercice 18

1) **Vocabulaire**
- le coût représente l'argent dépensé pour produire
- la recette représente l'argent récolté lors d'une vente
- le bénéfice est la différence entre le coût et la recette

Avec des symboles : si le coût est C, la recette R et le bénéfice B on a la relation $B = R - C$.

On parle de perte plus que de bénéfice lorsque B est négatif. Dans ce cas, $R < C$, par contre B est positif lorsque $R > C$.

Bien souvent, ces nombres B, R et C dépendent du nombre x d'objets produits et vendus.

On écrit donc des relations $B(x) = R(x) - C(x)$.

B, R et C sont alors des fonctions, et on étudie le signe du bénéfice $B(x)$ selon les valeurs de x.

2) **Modélisation :** il s'agit de trouver ici des formules

a) On vend des plantes 10€ pièce. Quelle est la recette pour 5 plantes vendues ? 14 plantes ? x plantes ?

b) On vend des objets à 10€ pièce. Quelle est la recette pour x objets vendus ?

c) On vend des croissants au prix de 0,90€ pièce et des brioches au prix de 1,20€ pièce.

Quelle est la recette pour 5 croissants et 8 brioches vendus ?

Quelle est la recette pour x croissants et y brioches vendus ?

Exercice 19

Un médicament antalgique est administré par voie orale. La concentration du produit actif dans le sang est modélisé par une fonction f qui, au temps écoulé x en heures, associe la concentration $f(x)$ en milligrammes par litre de sang (mg/L). La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,6]$ par $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$.
L'affirmation : « Le produit actif est le plus concentré au bout de 2 heures. » est-elle vraie ? Justifier.

Exercice 20

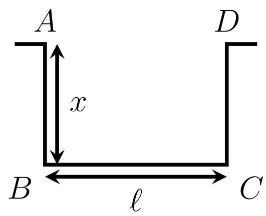
On souhaite faire circuler un fluide avec un frottement minimal dans un canal à section intérieure rectangulaire. $ABCD$ représente cette section ; x désigne la hauteur en m et ℓ la largeur en m de la section. On sait de plus que l'aire de la section est de 0,02 m^2.

1) Exprimer ℓ en fonction de x.

2) On note $L(x)$ la longueur du contour intérieur.

Expliquer pourquoi, pour tout $x > 0$, on a $L(x) = 2\,x + \dfrac{2}{100\,x}$.

3) Étudier les variations de L.



4) On sait que les frottements sont minimaux lorsque $AB + BC + CD$ est minimal.

Déduire de l'étude précédente les valeurs de x et ℓ pour lesquelles le frottement est minimal.

Exercice 21

Le coût total, en euros, de production d'un produit est donné par $C(x) = 0{,}01x^2 + 0{,}4x + 9$ avec $x \in [0\ ;\ 100]$ où x est la quantité produite. On se limite à une production de moins de 100 produits.

Le prix de vente unitaire est de 1,15 euros.

1) Est-ce rentable de produire puis de vendre 10 produits ? 20 produits ?

2) Montrer que la fonction coût est croissante sur $[0\ ;\ 100]$.

3) Pour quelle quantité le coût de production dépasse les 86 euros.

4) Exprimer en fonction de x : la fonction recette $R(x)$ et la fonction bénéfice $B(x)$.

5) Déterminer la ou les quantités à produire pour réaliser un bénéfice maximal.

6) Pour quelles quantités produites et vendues est-on bénéficiaire ?

Exercice 22

Une entreprise fabrique un produit chimique dont le coût total journalier de production pour x litres est donné par la fonction C définie pour tout $x \in (1\ ;\ 50]$ par $C(x) = 0{,}5x^2 + 2x + 200$, les coûts étant exprimés en centaines d'euros. Le prix de vente d'un litre de ce produit chimique est de 2 300 euros.

1) **Bénéfice :**

(a) Déterminer la fonction notée R donnant la recette pour x litres produits.

(b) Exprimer le bénéfice $B(x)$ en fonction de x.

(c) Déterminer la quantité à produire pour que le bénéfice soit maximal.

2) **Cout moyen :**

Le coût moyen de production d'un litre quand on en produit x litres est la fonction notée C_m et définie par $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ avec $x \in (1\ ;\ 50]$.

(a) Exprimer le coût moyen de production en fonction de x

(b) En déduire la quantité à produire, arrondie à 0,1 litres près, pour obtenir un coût moyen minimum.

3) **Cout marginal :**

Le coût marginal de production est le supplément de coût engendré par la production d'un litre supplémentaire. Si on note $C_M(x)$ le cout marginal, on a alors $C_M(x) = C(x+1) - C(x)$

(a) Calculer le coût marginal pour une production de 20 litres (cout de fabrication du 21^{eme} litre).

(b) Calculer $C'(20)$. Comparer les deux valeurs.

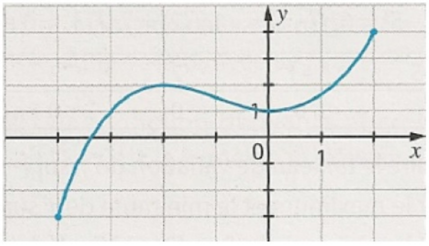
(c) En pratique on assimile le coût marginal de production pour une quantité x à la dérivée du coût total. On a en effet $C_M(x) = \dfrac{C(x+1) - C(x)}{x+1-x}$ (accroissement de C entre $x+1$ et x).
Donner la formule approximative de $C_M(x)$. Résoudre $C_m(x) = C_M(x)$.

Remarque : Le coût moyen est égal au coût marginal pour la valeur de x donnant le cout moyen minimum.

Exercices graphiques (minimum exo 23 à 25)

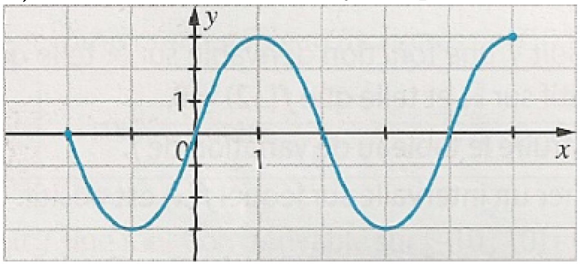
Exercice 23

1) Soit une fonction f représentée ci-dessous :



Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[-4\ ;\ 2]$.

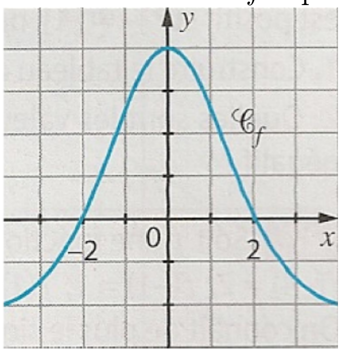
2)Soit une fonction f représentée ci-dessous :



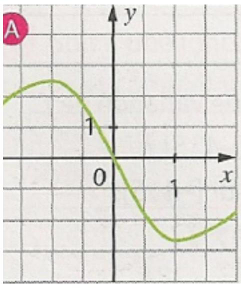
Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[-2\ ;\ 5]$.

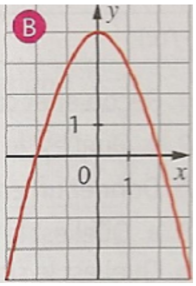
Exercice 24

Soit une fonction f représentée ci-dessous



Déterminer, parmi les courbes ci-dessous, celle de la fonction f'.



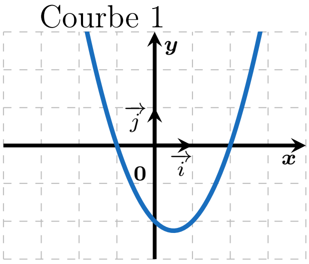


Exercice 25

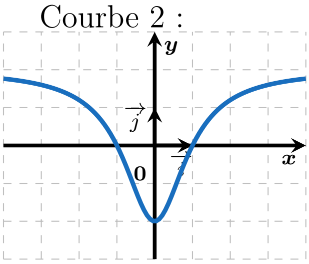
On considère deux fonctions f et g et leurs dérivée f' et g' définies sur $[-4;4]$ représentées ci-dessous.

Qui est qui ?

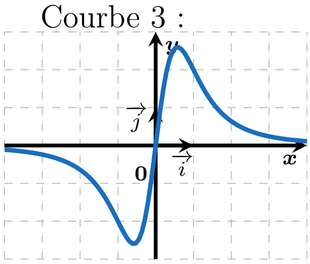
Courbe 1



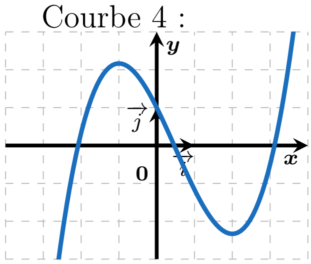
Courbe 2 :



Courbe 3 :



Courbe 4 :



Exercice 26

Dans les quatre cas, construire la courbe d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions données :

- $f(x) > 0$ et $f'(x) > 0$
- $f(x) > 0$ et $f'(x) < 0$
- $f(x) < 0$ et $f'(x) > 0$
- $f(x) < 0$ et $f'(x) < 0$

Exercice 27

Construire les tableaux de variations des fonctions F_1, F_2 et F_3 ayant pour dérivées respectives f_1, f_2 et f_3 représentées ci-dessous :