Variation d'une fonction

Parcours 5 : Comment optimiser (un coût, un bénéfice, une aire, un périmètre,...) ?

A) Minimum, maximum, extremum

Définition :

Soit f une fonction et soit a un réel.

- si $f(x) \leqslant f(a)$ pour tout x alors $f(a)$ est le maximum de f.
- si $f(x) \geqslant f(a)$ pour tout x alors $f(a)$ est le minimum de f.

Un **extremum** est soit un minimum, soit un maximum.

Optimiser, c'est rechercher si une fonction admet (ou non) un extremum.

B) Variation d'une fonction du second degré

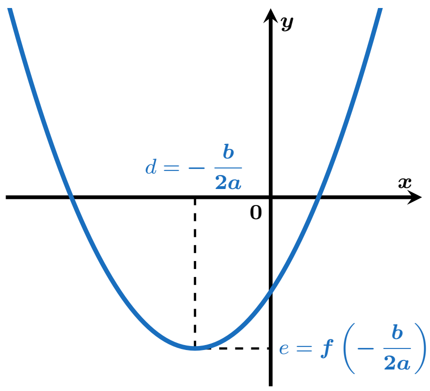
Définition 2 :

Soit f une fonction du second degré. La forme canonique nous indique les variations de la fonction et donc l'existence d'un extrémum. $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a \neq 0$

Si $a > 0$

f est décroissante puis croissante.

f admet un minimum

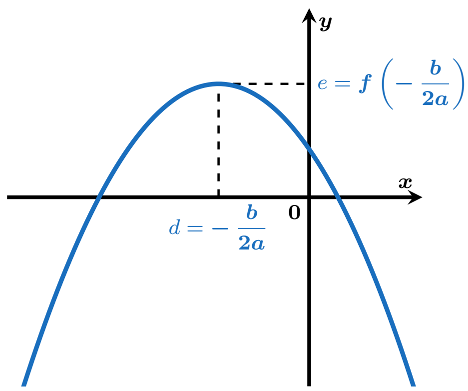


x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Variations de f	↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗

Si $a < 0$

f est croissante puis décroissante.

f admet un maximum



x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Variations de f	↗	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘

C) Variation d'une fonction de degré supérieur à deux

1) Rappels : la dérivée

Définition 3 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I.

- On appelle « nombre dérivé de f en a » et on note $f'(a)$ le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.
- Dire que f est dérivable sur I signifie que f admet un nombre dérivé pour tout réel x de I.

Définition 4 :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. La fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f. On la note f'.

2) Signe de la dérivée et variation de la fonction

Théorème : Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout $x \in$ J, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur J.
- Si pour tout $x \in$ J, $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur J.
- Si pour tout $x \in$ J, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur J.

Théorème : Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est une fonction croissante et dérivable sur un intervalle I alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
- Si f est une fonction décroissante et dérivable sur un intervalle I alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.
- Si f est une fonction constante sur un intervalle I alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

3) Extremum d'une fonction

Théorème :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.

Si la dérivée de f s'annule en a en changeant de signe alors f admet en a un extremum local.

Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5$

f est dérivable et $f'(x) =$ ....

Signe de $f'(x)$ et variation de f :

....

....

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

4) Variation d'une fonction

Point méthode :

Pour déterminer les variations d'une fonction, il faut respecter un protocole.

Parfois, ce protocole est détaillé dans les questions de l'exercice, parfois, non.

★ Justifier la dérivabilité de la fonction sur l'intervalle donné.

★ Calculer la dérivée de la fonction.

★ Étudier le signe de la dérivée de la fonction.

★ Construire le tableau de variation, en précisant la valeur des extremums locaux.

On sait déjà dériver les fonctions de référence ainsi que les fonctions du type $u + v$ et $k \times u$ avec $k \in \mathbb{R}$ (cf chapitre 2).

Pour pouvoir étudier d'autres fonctions, il est nécessaire d'avoir de nouveaux résultats sur des opérations sur les dérivées :

Théorème : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors :

1) uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

. Conséquence : Si $u = v$, on a $(u^2)' = 2u\,u'$

2) Si v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

. Conséquence : Si u est une fonction constante égale à $k \in \mathbb{R}^*$ alors, $\left(\dfrac{k}{v}\right)' = -\dfrac{kv'}{v^2}$

3) $(u(mx + p))' = m \times u'(mx + p)$.

- $f(x) = x\sqrt{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

....

....

....

....

....

- $m(x) = (2x - 3)^5$.

....

....

....

....

....

- $j(x) = \dfrac{4x + 5}{x - 6}$ sur $]6\,;\,+\infty[$.

....

....

....

....

....

- $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 3}$ sur $]1\,;\,+\infty[$

....

....

....

....

....

- $l(x) = \sqrt{2x+3}$ sur $]-1\,;\,+\infty[$.

  ....

  ....

  ....

- $h(x) = (5x+1)^2$

  ....

  ....

  ....

D) Signe d'une expression du second degré

Pour trouver le signe d'une expression, il faut d'abord la factoriser pour utiliser la règle des signes d'un produit.

Théorème :

Soit $A = ax^2 + bx + c$ une expression du second degré où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Soit Δ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$ alors A est du signe de a partout sauf entre les racines x_1 et x_2.
- Si $\Delta = 0$ alors A est du signe de a partout et nulle en x_0.
- Si $\Delta < 0$ alors A est du signe de a partout.

<table>
<tr><td></td><td>$\Delta > 0$</td><td>$\Delta = 0$</td><td>$\Delta < 0$</td></tr>
<tr><td>Racines
de A</td><td>$x_1 = \dots$
$x_2 = \dots$</td><td>$x_0 = \dots$</td><td>Pas de racine</td></tr>
<tr><td>Factorisation</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$\Delta > 0$</td><td>$\Delta = 0$</td><td>$\Delta < 0$</td></tr>
<tr><td>Pour $a > 0$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>A</td><td></td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>A</td><td></td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>A</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Pour $a < 0$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>A</td><td></td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>A</td><td></td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>A</td><td></td></tr></table></td></tr>
</table>