**$1^{ere}$ générale** **2019 - 2020**

## Parcours 5 : Comment optimiser une quantité ?

**(un périmètre,une aire, un coût, un bénéfice, . . . )**

# Exercices techniques :

## ==================Correction 1====================

Chacune des fonctions suivantes est une fonction du second degré, donnée sous sa forme canonique, qui nous permet de déterminer ses variations et extrémum facilement (cours de début d'année)

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

**1)** $f(x) = -2x^2$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ |

$a < 0$ donc la parabole admet un maximum

(branches vers le bas)

Dans sa forme canonique $\alpha = 0$ et $\beta = 0$

**2)** $f(x) = 2(x-1)^2 + 2$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ |

$a > 0$ donc la parabole admet un minimum

(branches vers le haut)

Dans sa forme canonique $\alpha = 1$ et $\beta = 2$

**3)** $f(x) = x^2 + 5$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $\searrow$ | $5$ | $\nearrow$ |

$a > 0$ donc la parabole admet un minimum

(branches vers le haut)

Dans sa forme canonique $\alpha = 0$ et $\beta = 5$

**4)** $f(x) = -7(x+3)^2 - 5$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $\nearrow$ | $-5$ | $\searrow$ |

$a < 0$ donc la parabole admet un maximum

(branches vers le bas)

Dans sa forme canonique $\alpha = -3$ et $\beta = -5$

**5)** $f(x) = -\left(x + \dfrac{1}{4}\right)^2 + 2$

| $x$ | $-\infty$ | $-\dfrac{1}{4}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ |

$a < 0$ donc la parabole admet un maximum

(branches vers le bas)

Dans sa forme canonique $\alpha = \dfrac{-1}{4}$ et $\beta = 2$

## ==================Correction 2====================

Chacune des fonctions suivantes est une fonction du second degré, donnée sous sa forme développée. On va chercher sa forme canonique qui nous permettra de déterminer ses variations et extrémum facilement (cours de début d'année)

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

**1)** $f(x) = 2x^2 + 3x = 2\left(x^2 + \dfrac{3}{2}x\right) = 2\left(\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2 - \dfrac{9}{16}\right) = 2\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2 - \dfrac{9}{8}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\dfrac{3}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | | $\searrow$ | $-\dfrac{9}{8}$ | $\nearrow$ | |

$a > 0$ donc la parabole admet un minimum

(branches vers le haut)

Dans sa forme canonique $\alpha = -\dfrac{3}{4}$ et $\beta = -\dfrac{9}{2}$

**2)** $f(x) = 2x^2 + 4x - 1 = 2\left(x^2 + 2x - \dfrac{1}{2}\right) = 2\left((x+1)^2 - 1 - \dfrac{1}{2}\right) = 2\left((x+1)^2 - \dfrac{3}{2}\right) = 2\,(x+1)^2 - 3$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | |

$a > 0$ donc la parabole admet un minimum

(branches vers le haut)

Dans sa forme canonique $\alpha = -1$ et $\beta = -3$

**3)** $f(x) = -6x^2 - 12x + 8 = -6\left(x^2 + 2x - \dfrac{4}{3}\right) = -6\left((x+1)^2 - 1 - \dfrac{4}{3}\right) = -6\left((x+1)^2 - \dfrac{7}{3}\right)$

$f(x) = -6\,(x+1)^2 + 14$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | | $\nearrow$ | $14$ | $\searrow$ | |

$a < 0$ donc la parabole admet un maximum

(branches vers le bas)

Dans sa forme canonique $\alpha = -1$ et $\beta = 14$

# Exercices de recherche :

## ==================Correction 3====================

Soit $f$ définie par $f(x) = -5(x+2)^2 - 3$

**1)** $f$ est une fonction du second degré représentée par une parabole.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | | $\nearrow$ | $-3$ | $\searrow$ | |

$a < 0$ donc la parabole admet un maximum

(branches vers le bas)

Dans sa forme canonique $\alpha = -2$ et $\beta = -3$

La courbe admet une symétrie par rapport à la droite d'équation $x = -2$.

On peut donc en déduire que $f(-2-a) = f(-2+a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}^*$. Pour $a = 1$ on obtient : $f(-3) = f(-1)$

**2**) Pour $a = 0{,}5$ on obtient $f(-2{,}5) = f(-1{,}5)$

Pour $a = 3$ on obtient $f(-5) = f(1)$

Pour $a = 5$ on obtient $f(-7) = f(3)$

Pour $a = 10$ on obtient $f(-12) = f(9)$

## ==================Correction 4====================

Soit $f$ définie par $f(x) = -7(x-5)^2 + 7$

$f$ est une fonction du second degré représentée par une parabole.

| $x$ | $-\infty$ | $-1{,}2$ | $2{,}8$ | $5$ | $5{,}6$ | $6{,}2$ | $9{,}8$ | $54{,}9$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | | $\nearrow$ | $\nearrow$ | $7$ | $\searrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ | |

$a < 0$

$\alpha = 5$ et $\beta = 7$

Symétrie par rapport à $x = 5$

$f(5{,}6) > f(6{,}2) > f(2{,}8) > f(9{,}8) > f(-1{,}2) > f(54{,}9)$

## ==================Correction 5====================

On note $A(x)$ l'aire de la partie colorée.

**1**) $E$ est un point du segment $[AD]$ de longueur 5 cm. Donc $x \in [0\,;\,5]$

**2**) $A(x) = A_{EIHD} + A_{GBFI}$ avec $EIHD$ un carré de coté $5-x$ et $GBFI$ un carré de coté $x$.

Donc $A(x) = (5-x)^2 + x^2 = 25 - 10x + x^2 + x^2 = 2x^2 - 10x + 25$

Pour trouver le minimum, cherchons la forme canonique :

$A(x) = 2x^2 - 10x + 25 = 2\left(x^2 - 5x + \dfrac{25}{2}\right)$

$A(x) = 2\left(\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4} + \dfrac{25}{2}\right) = 2\left(\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + \dfrac{25}{4}\right)$

$A(x) = 2\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + \dfrac{25}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\dfrac{5}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | | $\searrow$ | $\dfrac{25}{2}$ | $\nearrow$ | |

$a > 0$ donc la parabole admet un minimum (branches vers le haut)

Dans sa forme canonique $\alpha = \dfrac{5}{2}$ et $\beta = -\dfrac{25}{2}$

Il est donc clair que le minimum de $A(x)$ est $\dfrac{25}{2}$ atteint pour $x = \dfrac{5}{2}$

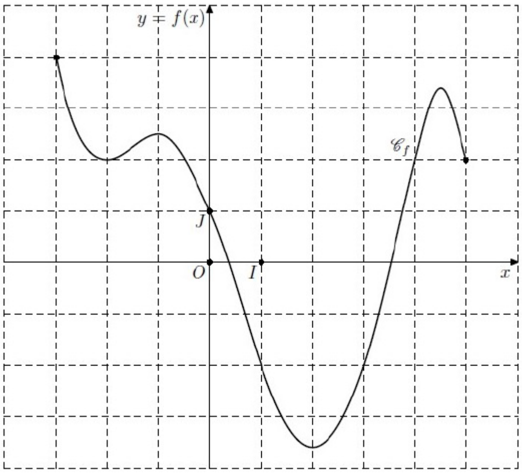
## Parcours 5 : Comment optimiser une quantité ?

**(un périmètre,une aire, un coût, un bénéfice, . . . )**

# Exercices de cours

## ==================Correction 6====================

Voici la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction $f$ :




**1)** Le maximum de la fonction sur $[-3\,;\,5]$ est 4

Il est atteint pour $x = -3$

**2)** Le minimum de la fonction sur $[-3\,;\,5]$ est -3,5

Il est atteint pour $x = 2$

**3)** Le maximum de la fonction sur $[0\,;\,5]$ est 3,4.

Il est atteint pour $x = 4{,}5$

**4)** Le minimum de la fonction sur $[-3\,;\,0]$ est 1.

Il est atteint pour $x = 0$

## ==================Correction 7====================

**Variations de fonctions de base** :

**1.** Rappeler les variations des fonctions définies par :

- $f(x) = 2x - 3 \quad m = 2 > 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Var de $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

- $g(x) = -5x + 8 \quad m = -5 < 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Var de $g$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

- $h(x) = x^2$ *À connaître*

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Var de $h$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**2.** Rappeler les variations des fonctions définies par :

- $f(x) = 2(x-1)^2 - 3$

$a = 2 > 0$, $\alpha = 1$ et $\beta = -3$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Var de $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

- $g(x) = -5(x+3)^2 + 8$

$a = -5 < 0$, $\alpha = -3$ et $\beta = 8$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Var de $g$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $8$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

- $h(x) = x^2 - 10$

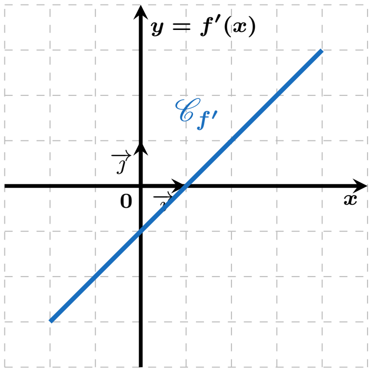
$a = 1 > 0$, $\alpha = 0$ et $\beta = -10$

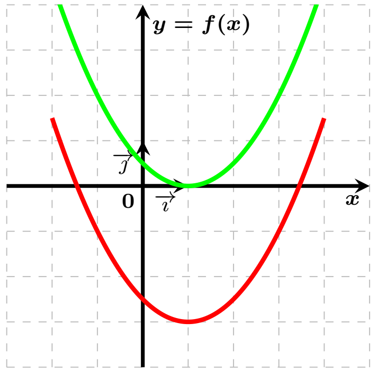
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Var de $h$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-10$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

## ====================Correction 8=====================

On donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction $f'$ sur $[-2;4]$.

En déduire les variations de $f$ puis donner une allure possible pour $\mathscr{C}_f$ dans le repère de droite.




$f'$ semble être une fonction affine dont le coefficient directeur est égal à 1.

On peut facilement dresser son tableau de signe.

Lorsque l'on dérive une fonction du second degré, on obtient une fonction affine.

On peut donc supposer que $f$ est une fonction du second degré.

Pour aller plus loin, si $f(x) = ax^2+bx+c$, alors $f'(x) = 2ax+b$.

Or, on sait que $2a$ doit être égal à 1. Ce qui laisse supposer que $a = 0{,}5$ ...

Il y a une infinité de possibilités, en voici deux.

| $x$ | $-2$ | | $1$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Var de $f$ | ... | $\searrow$ | ... | $\nearrow$ | ... |

## ====================Correction 9=====================

Soit $f$ la fonction définie et dérivable sur $I = [-2;3]$ par $f(x) = -x^3 + 3x - 1$.

**1)** Étudier les variations de $f$ sur $I$.

- **Calcul de la dérivée :** $f'(x) = -3x^2 + 3$
- **Signe de la dérivée :** Cherchons d'abord quand la dérivée s'annule.

  $\Delta = 36 < 0$. Il y a donc deux racines : $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$

  De plus la dérivée est une expression du second degré dont la courbe est une parabole admettant un maximum (puisque $a = -3 < 0$).

  On a donc :

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

- **Variations de la fonction $f$ :**

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $1$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-19$ |

car $f(-2) = 1$

$f(-1) = -3$

$f(1) = 1$

$f(3) = -19$

**2)** Le maximum vaut donc 1 et est atteint pour $x = -2$ et $x = 1$

Le minimum vaut -19 et est atteint pour $x = 3$

## ==================Correction 10====================

Dans chaque cas, $f$ est une fonction définie et dérivable sur un intervalle donné. Calculer $f'(x)$.

**1)** $f(x) = x^2\left(x^2 - 3\,x + 5\right)$ sur $\mathbb{R}$

On utilise la formule de dérivation d'une forme $u \times v$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = x^2 - 3x + 5$.

On a donc $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2x - 3$

$f'(x) = 2x(x^2 - 3x + 5) + x^2(2x - 3) = 2x^3 - 6x^2 + 10x + 2x^3 - 3x^2 = 4x^3 - 9x^2 + 10x$

**Remarque :** On pouvait aussi développer $f(x)$ pour obtenir une expression de degré 4 facile à dériver.

**2)** $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-1}$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

On utilise la formule de dérivation d'une forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 3x - 1$ et $v(x) = x - 1$

On a donc $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 1$

$f'(x) = \dfrac{3(x-1) - (3x-1) \times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{3x - 3 - 3x + 1}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

**3)** $f(x) = (1 - 2x)\left(3x^2 + 1\right)$ sur $\mathbb{R}$

On utilise la formule de dérivation d'une forme $u \times v$ avec $u(x) = 1 - 2x$ et $v(x) = 3x^2 + 1$.

On a donc $u'(x) = -2$ et $v'(x) = 6x$

$f'(x) = -2(3x^2 + 1) + (1 - 2x)(6x) = -6x^2 - 2 + 6x - 12x^2 = -18x^2 + 6x - 2$

**4)** $h(x) = \dfrac{-7}{3\,x^2 + 1} = -7 \times \dfrac{1}{3x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$

On utilise la formule de dérivation d'une forme $\dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = 3x^2 + 1$. On a donc $v'(x) = 6x$

$f'(x) = -7 \times \dfrac{-6x}{(3x^2+1)^2} = \dfrac{42x}{(3x^2+1)^2}$

## ==================Correction 11====================

Soit $f(x) = -x^2 + 3x - 10$ définie sur $\mathbb{R}$.

**1)** $f'(x) = -2x + 3$ et donc $f'(1) = -2 \times 1 + 3 = 1 > 0$

La courbe de $f$ admet une tangente au point d'abscisse 1 dont le coefficient directeur est positif et donc croissante.

La courbe de $f$ est donc elle aussi croissante aux alentours proches du point d'abscisse 1.

**2)**
- $f'(x) = -2x + 3$ et donc $f'(-2) = -2 \times (-2) + 3 = 7 > 0$

  La courbe de $f$ est donc elle croissante aux alentours proches du point d'abscisse -2.
- $f'(x) = -2x + 3$ et donc $f'(1{,}5) = -2 \times 1{,}5 + 3 = 0$

  La courbe de $f$ n'est donc ni croissante, ni décroissante aux alentours proches du point d'abscisse 1,5.

## ==================Correction 12=====================

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère et $T_1$ est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

**1)** L'équation de la tangente $T_1$ est de la forme $y = f(1)(x-1) + f(1)$

or $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$ donc $f'(1) = 4$ et $f(1) = 0$. On obtient donc $y = 4x - 4$

**2)** On considère la fonction $g$ définie sur$\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (4x-4)$.

**a)** • **Dérivée de $g$ :** $g(x) = f(x) - (4x-4) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ et donc $g'(x) = 3x^2 + 2x - 5$

• **Signe de $g'(x)$ :**

$\Delta = 64 >$ donc deux racines : $x_1 = \dfrac{-2-8}{6} = -\dfrac{5}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-2+8}{6} = 1$

On peut déduire du signe de $a$ le signe de $g'$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{5}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

• **Variations de $g$ :**

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{5}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $g$ | | $\nearrow$ | $g\left(-\frac{5}{3}\right)$ | $\searrow$ | $g(1)$ | $\nearrow$ | |

**b)** $g(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 - 5(-3) + 3 = -27 + 9 + 15 + 3 = 0$

$g(1) = (1)^3 + (1)^2 - 5(1) + 3 = 1 + 1 - 5 + 3 = 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-\frac{5}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $g$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $g\left(-\frac{5}{3}\right)$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

**c)** la lecture du tableau de variation de $g$ nous permet de déduire son signe :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | | | | | $1$ | | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $g$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | |

$g(x) = f(x) - (4x-4) < 0$ sur $]-\infty\,;-3[$ et donc $g(x) < (4x-4)$ sur $]-\infty\,;-3[$

$g(x) = f(x) - (4x-4) > 0$ sur $]-3\,;+\infty[$ et donc $g(x) > (4x-4)$ sur $]-3\,;+\infty[$

On en déduit que $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $T_1$ sur $]-\infty\,;-3[$ et $\mathcal{C}_f$ est au dessus de $T_1$ sur $]-3\,;+\infty[$

# 3) Exercices internes aux mathématiques

## ==================Correction 13====================

**Partie A : Étude d'une fonction polynôme de degré** 2

Sur $[-3, 4]$ : $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 1$

**1**) Variation de $f$ :

(**a**) Fonction du second degré donnée sous sa forme canonique :

| $x$ | $-3$ | | $0$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | |

(**b**) Avec la dérivée $f'$ : $f'(x) = 3x$.

| $x$ | $-3$ | | $0$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | |

**2**) Équation de $T$, tangente à la courbe $C_f$ au point d'abscisse $-1$ : $y = -3x - \dfrac{5}{2}$

**Partie B : Étude d'une fonction polynôme de degré** 3

Sur $[-3, 4]$ , $g(x) = -x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + 6x - 1$

**1**) (**a**) $g'(x) = -3x^2 + 3x + 6$ qui admet deux racines $-1$ et $2$.

(**b**) Signe de $g'(x)$ et variation de $g$ sur $[-3,4]$ :

| $x$ | $-3$ | $\alpha$ | $-1$ | $\beta$ | $2$ | $\gamma$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Variations de $f$ | $21.5$ | $\searrow$ $0$ $\searrow$ | $-4.5$ | $\nearrow$ $0$ $\nearrow$ | $9$ | $\searrow$ $0$ $\searrow$ | $-17$ |

(**c**) Le tableau de variation nous permet de voir que $g(x) = 0$ admet trois solutions : la première sur $[-3\,;\,-1]$, la seconde sur $[-1\,;\,2]$ et la troisième sur $[2\,;\,4]$.

## ===================Correction 14=====================

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5x+3}{x^2-x+1}$.

**1**) En utilisant la formule de dérivation d'une fonction de la forme $\dfrac{u}{v}$ on obtient : $f'(x) = \dfrac{-5x^2-6x+8}{(x^2-x+1)^2}$.

**2**) Variation de la fonction $f$ :

Le numérateur s'annule pour $x = -2$ et $x = \dfrac{4}{5}$.

Le dénominateur ne s'annule jamais (tant mieux, pas de valeur interdite !)

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $\frac{4}{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $-5x^2-6x+8$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Signe de $(x^2-x+1)^2$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Variations de $f$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

## ===================Correction 15=====================

On considère ci-contre une partie de la courbe $C_f$ de la fonction $f$ définie par $f(x) = 2 + \dfrac{3x}{x^2-4}$.

**1**) Domaine de définition de $f = D_f = \mathbb{R} - \{-2\,; 2\}$.

**2**) Voir calculatrice.

**3**) $f'(x) = \dfrac{-3x^2-12}{(x^2-4)^2}$

Le numérateur ne s'annule jamais. Le dénominateur s'annule pour $x = -2$ et $x = 2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $-3x^2-12$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| Signe de $(x^2-4)^2$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | |
| Variations de $f$ | | $\searrow$ | $\Vert$ | $\searrow$ | $\Vert$ | $\searrow$ | |

## ===================Correction 16=====================

Sur $\mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3\,x^2 + 2$.

**1**) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

**2**) Équation de la tangente $T$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $1 = y = -3x + 3$

## =================Correction 17====================

# Exercices avec contexte

## ==================Correction 18====================

**2)** **Modélisation :** il s'agit de trouver ici des formules

**a)** On vend des plantes 10€ pièce.

Recette pour 5 plantes vendues : 50 €

Recette pour 14 plantes : 140 €

Recette pour $x$ plantes : $10x$

**b)** On vend des objets à 10€ pièce.

Recette pour $x$ objets vendus : $10x$

**c)** On vend des croissants au prix de 0,90€ pièce et des brioches au prix de 1,20€ pièce.

Recette pour 5 croissants et 8 brioches vendus : 14,1 €

Recette pour x croissants et y brioches vendus : $0.9x + 1.2y$

## ==================Correction 19====================

La fonction concentration $f$ est définie sur l'intervalle $[0\,;\,6]$ par $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$.

(au temps écoulé $x$ en heures, on obtient $f(x)$ en milligrammes par litre de sang (mg/L).)

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$ qui s'annule pour $x = 2$ et $x = 6$

| $x$ | 0 | | 2 | | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 |
| Variations de $f$ | | $\nearrow$ | 32 | $\searrow$ | |

L'affirmation : « Le produit actif est le plus concentré au bout de 2 heures. » est vraie.

## ==================Correction 20====================

**1)** Aire$= xl = 0.02$ donc $l = \dfrac{0.02}{x}$

**2)** On note $L(x)$ la longueur du contour intérieur. : $L(x) = 2x + l = 2x + \dfrac{0.02}{x} = 2\,x + \dfrac{2}{100\,x}$.

**3)** $L'(x) = 2 - \dfrac{200}{(100x)^2} = \dfrac{200(100x^2-1)}{(100x)^2}$.

| $x$ | 0 | | 0.1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | $\Vert$ | $-$ | 0 | $+$ | |
| Variations de $f$ | $\Vert$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Le numérateur s'annule pour $x = -0.1$ (hors intervalle) et pour $x = 0.1$

Le dénominateur s'annule pour $x = 0$

**4**) Le frottement est minimal pour $x = 0.1$ et $l = 0.2$

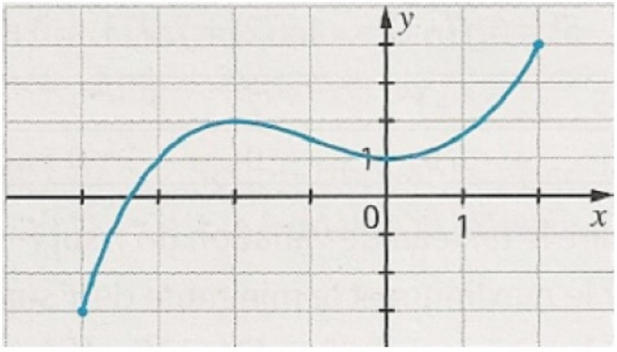
## ===================Correction 21====================

## ===================Correction 22====================

# Exercices graphiques

## ==================Correction 23====================

**1)** Soit une fonction $f$ représentée ci-dessous :



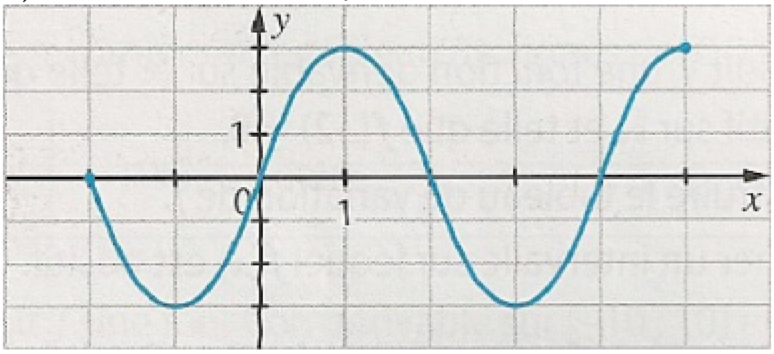

On voit graphiquement les variations de $f$

| $x$ | $-4$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Var de $f$ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

On peut en déduire le signe de $f'$

| $x$ | $-4$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**2)** Soit une fonction $f$ représentée ci-dessous :




On voit graphiquement les variations de $f$

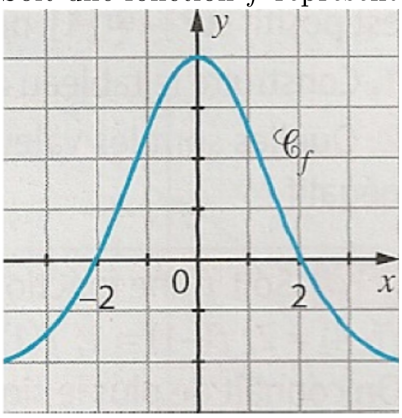
| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Var de $f$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

On peut en déduire le signe de $f'$

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

## ==================Correction 24====================

Soit une fonction $f$ représentée ci-dessous




On voit sur le graphique les variations de $f$ :

| $x$ | $-4$ | | $0$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $-2$ | ↗ | $4$ | ↘ | $-2$ |

On en déduit donc le signe de $f'$

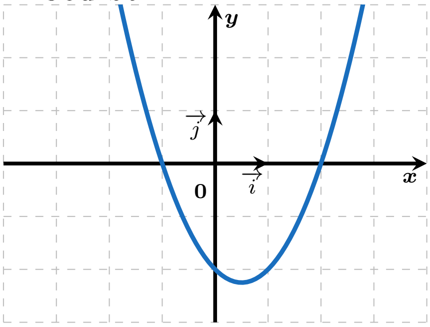
| $x$ | $-4$ | | $0$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

On va donc choisir la courbe $A$ qui est bien positive sur $[-4\,;\,0]$ et négative sur $[0\,;\,4]$

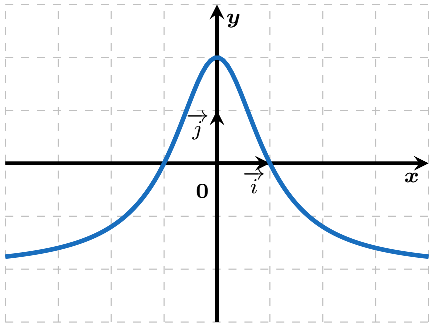
## ==================Correction 25====================

On considère deux fonctions $f$ et $g$ et leurs dérivée $f'$ et $g'$ définies sur $[-4; 4]$ représentées ci-dessous.

Courbe 1



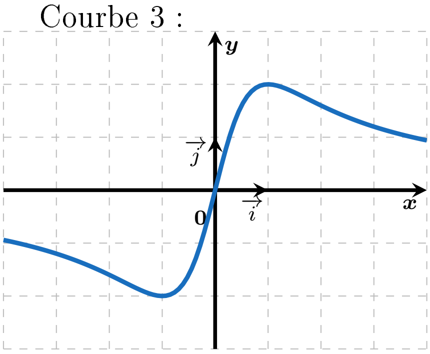

Courbe 2 :



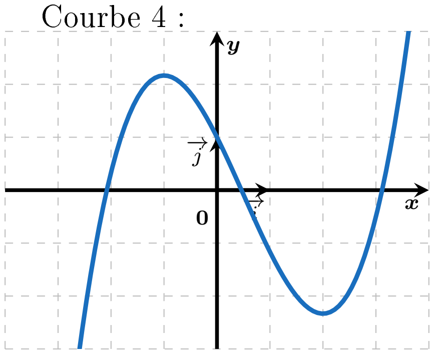

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Courbe 3 :




Courbe 4 :




| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | |

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

On peut alors se rendre compte que :

- le signe de la courbe 1 est cohérent avec les variations de la courbe 4
- le signe de la courbe 2 est cohérent avec les variations de la courbe 3

## ==================Correction 26====================

## ==================Correction 27====================