

B) Propriétés algébriques

Propriétés algébriques :

Soient a et b deux réels quelconques :

- $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$
- $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(na) = (\exp(a))^n$.
En particulier, $\exp(n) = \exp(1)^n = e^n$.

Par extension de l'écriture $\exp(n) = e^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$,
on notera, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$

- $e^{a+b} = e^a e^b$
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e^{na} = (e^a)^n$.
- $e^1 = e$ et $e^0 = 1$

Exemple 1 : Simplifier : $e^3 \times e^4$

$$\begin{aligned} e^3 \times e^4 &= e^{3+4} \\ &= e^7 \end{aligned}$$

Exemple 2 : Simplifier : $\frac{e^5 \times e^{-3}}{e^{-2}}$

$$\begin{aligned} \frac{e^5 \times e^{-3}}{e^{-2}} &= \frac{e^{5+(-3)}}{e^{-2}} \\ &= \frac{e^2}{e^{-2}} \\ &= e^{2-(-2)} = e^4 \end{aligned}$$

Exemple 3 : Simplifier : $(e^x + 1)^2 - (e^x - 1)^2$

$$\begin{aligned} (e^x + 1)^2 - (e^x - 1)^2 &= (e^x)^2 + 2e^x + 1 - ((e^x)^2 - 2e^x + 1) \\ &= e^{2x} + 2e^x + 1 - e^{2x} + 2e^x - 1 \\ &= 4e^x \end{aligned}$$

Exemple 4 : Montrer que pour tout réel x , $e^{2x} - 4e^x - 5 = (e^x - 5)(e^x + 1)$

$$\begin{aligned} (e^x - 5)(e^x + 1) &= e^x \times e^x + e^x \times 1 + (-5) \times e^x + (-5) \times 1 \\ &= e^{x+x} + e^x - 5e^x - 5 \\ &= e^{x+x} - 4e^x - 5 \end{aligned}$$