1^{ere} **2019 - 2020**

Fonction exponentielle

A) La fonction exponentielle

Théorème :

Il existe une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

- Pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$.
- $f(0) = 1$.

Définition :

On appelle **fonction exponentielle**, notée exp, l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

- Pour tout réel x, $\exp{}'(x) = \exp(x)$.
- $\exp(0) = 1$.

Théorème :

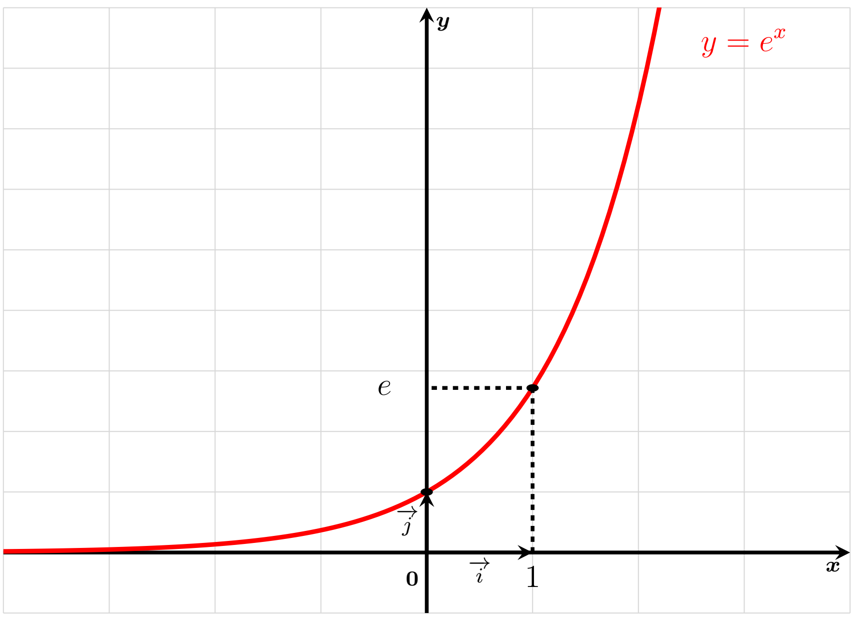
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$. La fonction exponentielle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Remarque : La fonction exponentielle croit très vite (exemple : $\exp(10) \approx 22\,026$).
C'est pourquoi on parle parfois, dans le langage courant de phénomènes avec une croissance exponentielle lorsque la croissance est très rapide.

Tableau de variations : La fonction exponentielle est définie, dérivable, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Variations de exp	0	1	e	$+\infty$

On note e le nombre $\exp(1)$.



B) Propriétés algébriques

Propriétés algébriques :

Soient a et b deux réels quelconques :

- $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$
- $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(na) = (\exp(a))^n$.

  En particulier, $\exp(n) = \exp(1)^n = e^n$.

Par extension de l'écriture $\exp(n) = e^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, on notera, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$

- $e^{a+b} = e^a\, e^b$
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e^{na} = (e^a)^n$.
- $e^1 = e$ et $e^0 = 1$

Exemple 1 : Simplifier : $\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^4$

$\mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^4 =$ ....

Exemple 2 : Simplifier : $\dfrac{\mathrm{e}^5 \times \mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^{-2}}$

$\dfrac{\mathrm{e}^5 \times \mathrm{e}^{-3}}{\mathrm{e}^{-2}} =$ ....

....

Exemple 3 : Simplifier : $(\mathrm{e}^x + 1)^2 - (\mathrm{e}^x - 1)^2$

$(\mathrm{e}^x + 1)^2 - (\mathrm{e}^x - 1)^2 =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

Exemple 4 : Montrer que pour tout réel x, $e^{2x} - 4e^x - 5 = (e^x - 5)(e^x + 1)$

....

....

....

C) D'autres fonctions exponentielles : $x \mapsto e^{u(x)}$

Définition :

On peut définir la composée de la fonction exponentielle avec une fonction u telle que

$$x \underset{x \in D_u}{\longmapsto} u(x) \longmapsto e^{u(x)}$$

La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ étant définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ sera définie quand $u(x)$ sera définie c'est à dire sur le domaine de définition de la fonction u.

Exemples :

- $f(x) = e^{1/x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$
- $g(x) = e^{3x^2-4x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$
- $h(x) = e^{\sqrt{x}}$ définie sur $[0\,; +\infty[$

Théorème : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction e^u est dérivable sur I

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}$$

Exemples :

- $f(x) = e^{1/x}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$
- $g(x) = e^{3x^2-4x+1}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $h(x) = e^{\sqrt{x}}$ définie sur $[0\,; +\infty[$ et dérivable sur $]0\,; +\infty[$

- $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \times e^{1/x}$
- $g'(x) = (6x-4) \times e^{3x^2-4x+1}$
- $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

Remarque 1 : Le sens de variation de la fonction e^u sera donc le même que celui de la fonction u.

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times \underset{positif}{e^{u(x)}}$$

Remarque 2 : Les formules de dérivation d'un produit et/ou d'un quotient restent valables :

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Théorème : La fonction exponentielle etant strictement croissante, si a et b sont deux réels

$e^a = e^b$ si et seulement si $a = b$ $\qquad$ $e^a < e^b$ si et seulement si $a < b$

Exemples :

$$e^{2x+3} = e^{x-5} \iff 2x+3 = x-5$$
$$\iff x = -8$$

$$e^{x^2-2x-3} = 1 \iff e^{x^2-2x-3} = e^0$$
$$\iff x^2-2x-3 = 0$$
$$\iff x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 3$$