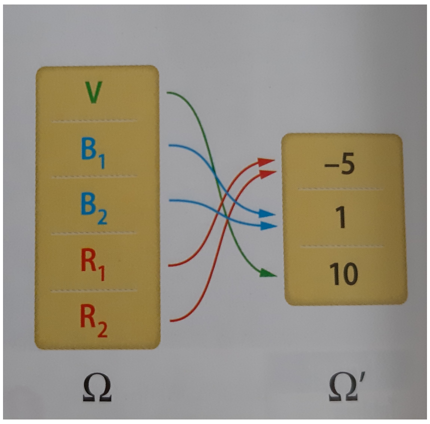
Probabilités et variables aléatoires.

Modélisation numérique d'une expérience aléatoire :

Une urne contient une boule verte notée V, deux boules bleues V_1 et V_2 et deux boules rouges R_1 et R_2.
On note Ω l'ensemble des issues de cette expérience.
On tire une boule au hasard dans cette urne :

* Si l'on tire la boule verte on gagne 10 €
* Si l'on tire une boule bleue on gagne 1 €
* Si l'on tire une boule rouge on perd 5 €

Cette situation peut être illustrée par le schéma ci-contre.



A un évènement de Ω, on associe une valeur numérique.
On dit qu'on a défini **une variable aléatoire**, X, qui modélise ici le gain algébrique du joueur en euros.

Définition :

On appelle **variable aléatoire** toute fonction X de l'ensemble Ω des issues possibles vers $\mathbb{R}$.
On note : $X : \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \text{issue} & \longmapsto & x_i \end{array}$

Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Dans la situation précédente, on peut définir les probabilités suivantes :
* $P(X = 1)$: probabilité que la variable aléatoire soit égale à 1, soit la probabilité d'obtenir B_1 ou B_2.
* $P(X = 10)$: probabilité que la variable aléatoire soit égale à 10, soit la probabilité d'obtenir V.
* $P(X = -5)$: probabilité que la variable aléatoire soit égale à -5, soit la probabilité d'obtenir R_1 ou R_2.
* $P(X \leqslant 1)$: probabilité que la variable aléatoire soit inférieure ou égale à 1, soit la probabilité d'obtenir B_1 ou B_2 ou R_1 ou R_2.

Définition :

On appelle **loi de probabilité de la variable** X (que l'on peut résumer dans un tableau) la liste des probabilités associées à chacune des valeurs possibles de la variable aléatoire.

D'après l'exemple, on a alors :

Valeurs de $X = x_i$	-5	1	10
$P(X = x_i)$	0,4	0,4	0,2

Remarque : Si on donne la loi de probabilité pour une variable aléatoire X, qui prend les valeurs x_1, x_2,...x_k, on a forcément $P(X = x_1) + P(X = x_2) + ... + P(X = x_k) = 1$.

Application directes

1) On lance une fois un dé équilibré et on gagne un nombre de points égal au double du numéro de la face affichée. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le nombre de points gagnés.

   a) Quelle sont les issues possibles dans cette expérience ? ....

   b) Quelles sont alors les valeurs possibles de la variables X ? ....

   c) Quelle est l'issue qui correspond à l'évènement $\{X = 4\}$? ....
   Que vaut alors $P(X = 4)$? ....

   d) Quelles sont les issues qui correspondent à l'évènement $\{X < 6\}$? ....
   Que vaut alors $P(X < 6)$? ....

2) Un sac contient un jeton J_1 marqué 1 et un jeton J_2 marqué 2.
   On tire au hasard un jeton et on note son numéro, puis on le remet dans le sac. Ensuite, on effectue un second tirage dans les mêmes conditions.
   On note X la variable aléatoire qui donne la somme des deux nombres obtenus.

   a) Quelles sont les valeurs prises par X ? ....

   b) Quelles sont les issues correspondants à l'évènement $\{X = 3\}$? ....
   En déduire $P(X = 3)$: ....

3) Un considère les huit cartes de coeur d'un jeu de 32 cartes, et on tire une carte au hasard.
   La variable aléatoire X prend la valeur 2 si l'on tire 7, 8, 9 ou 10, la valeur 3 si l'on tire V, D ou R et la valeur 5 si l'on tire l'as.

   Donner la loi de probabilité de cette variable :

Valeurs de $X = x_i$	2	3	5
$P(X = x_i)$			

Espérance

Définition :

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $\{x_1; x_2; ....; x_k\}$.
L'**espérance d'une variable aléatoire** est la moyenne de ses valeurs pondérées par leur probabilité.
On note : $E(X) = x_1P(X = x_1) + x_2P(X = x_2) + ... + x_kP(X = x_k)$.

Remarques :

- L'espérance d'une variable aléatoire est la valeur théorique que l'on peut espérer obtenir si on répète l'expérience un grand nombre de fois.
- L'espérance s'exprime dans la même unité que les valeurs x_i.
- Une expérience (par exemple un jeu) est dite équitable lorsque $E(X) = 0$.
  On dira que le jeu est favorable au joueur lorsque $E(X) > 0$ (et défavorable dans le cas contraire).

Dans l'exemple du début du cours, on a : $E(X) = -5 \times 0{,}4 + 1 \times 0{,}4 + 10 \times 0{,}2 = -2 + 0{,}4 + 2 = 0{,}4$

Autrement dit, avec ce jeu on peut espérer gagner en moyenne 0,40 euros par partie, si on joue beaucoup.

A vérifier : situation 1 : $E(X) = 7$ situation 2 : $E(X) = 3$ et situation 3 : $E(X) = \dfrac{22}{8} = 2{,}75$.