Échantillonnage

I Problématiques

On va donner deux exemples de problématiques pour nous guider dans cette séquence :

Exemple 1 : *Un dé truqué ?*

Nous savons que sur un dé à quatre faces équilibré, la probabilité d'obtenir un « 4 » est $\frac{1}{4}$ soit 25%.
Tom lance plusieurs fois un dé à quatre faces. Il obtient 50% de « 4 ».
Une question se pose : « le dé est-il truqué ou est-ce un tirage exeptionnel ? »
Cela dépend de plusieurs paramètres et en particulier, du **nombre de lancers :**
En effet, si Tom n'a lancé que 2 fois le dé et obtenu un « 4 », on ne peut pas conclure, le nombre d'essais étant trop faible.
En revanche, si Tom a lancé 1000 fois le dé et obtenu 500 « 4 », on peut se dire que soit le dé est truqué, soit il s'agit d'une série de tirages vraiment exeptionnelle. Mais quelle certitude a-t-on ?

Exemple 2 : *Qui va gagner ?*

Avant une élection, il est impossible de connaître avec certitude le nombre de personnes qui vont voter pour un candidat.
Afin de fournir des estimations, on réalise des sondages.
Imaginons : En France, au second tour de la présidentielle, il reste deux candidats, M.CHEMISE et Mme.ROBE.
Une enquête réalisée sur un groupe d'individus montre que 54% des personnes de cet échantillon voteront pour Mme.ROBE.
Plusieurs questions se posent : « Quel pourrait être le résultat de l'élection ? », « Quelle certitude a-t-on ? »
Encore une fois, cela dépend de plusieurs paramètres dont le **nombre de personnes interrogées :**
En effet, il va être plus difficile d'estimer le résultat de l'élection si seulement 50 personnes ont été interrogées.

II Échantillon, simulation et fluctuation

Définition : *Échantillon*

Un **échantillon** de taille n est constitué des résultats de n répétitions indépendantes de la même expérience.

Exemples 3 : *Exemples d'échantillons*

- ☞ on lance une pièce 50 fois et on regarde si on obtient pile ;
- ☞ on tire 20 fois une carte d'un jeu de 32 cartes en la remettant et on regarde si c'est un cœur ;
- ☞ on interroge 1 000 personnes et on leur demande si elles voteront.

Définition : *Fluctuation d'échantillonnage*

Deux échantillons de même taille issus de la même expérience aléatoire ne sont généralement pas identiques.
On appelle **fluctuation d'échantillonnage** les variations des fréquences des valeurs relevées.

Remarques :

- ☞ n est le nombre d'éléments de l'échantillon. C'est l'**effectif** ou la **taille de l'échantillon**.
  On dit que l'échantillon est de taille n.
- ☞ f_o est la **fréquence** du caractère observé dans l'échantillon.
- ☞ p est la **proportion effective** du caractère observé dans la population.
- ☞ Plus la taille de l'échantillon augmente, plus les fréquences observées se rapprochent de p.

III Prise de décision : intervalle de fluctuation (p est connu)

Protocole :

Soit une population pour laquelle on étudie la proportion d'un caractère.

On émet une hypothèse sur la proportion p du caractère étudié dans la population. On considère donc p comme connu car il a une valeur conjecturée.

Un échantillon de taille n de cette population est prélevé et on observe une fréquence f_o du caractère étudié.

La question :

Peut-on, à partir de l'observation de f_o, valider la conjecture faite sur p ?

La fréquence observée, f_o, est-elle proche ou éloignée de la probabilité ou proportion théorique, p ?

Définition : *Intervalle de fluctuation*

L'**intervalle de fluctuation au seuil de 95%**, relatif aux échantillons de taille n, est l'intervalle centré autour de p qui contient la fréquence observée f_o dans un échantillon de taille n avec une probabilité égale à 0,95.

Propriété :

Soit p la proportion effective d'un caractère d'une population comprise entre 0,2 et 0,8 et f_o la fréquence du caractère dans un échantillon de taille n supérieure ou égale à 25.

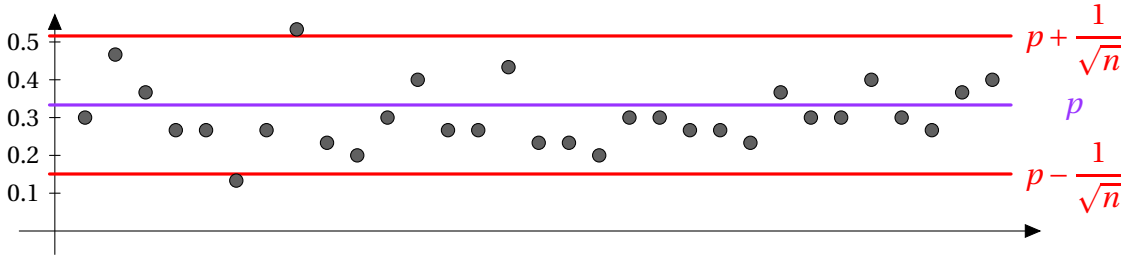
f_o appartient à l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}, p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité d'environ 0,95.

Exemple 4 : *Lancers de dés*

Vous avez effectué chacun 30 lancers d'un dé à six faces en notant la fréquence d'apparition de 5 ou de 6.

La probabilité p d'obtenir un 5 ou un 6 est de $\frac{1}{3} \approx 0,33$.

Voici les résultats en fréquences de vos 31 séries de 30 lancers :



On observe que 29 séries sur 31 sont dans l'intervalle : $\left[p-\frac{1}{\sqrt{30}}, p+\frac{1}{\sqrt{30}}\right]$.

Or, 95% de 31 correspond à 29,45.

Remarques :

La taille de l'intervalle de fluctuation $\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ diminue si n augmente.

Dans les conditions de la définition et de la propriété :

- ☞ On émet une hypothèse sur la proportion du caractère de la population p.
- ☞ On détermine l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la proportion p dans des échantillons de taille n.
  - — Si f_o n'appartient pas à cet intervalle, on rejette l'hypothèse sur p **avec un risque d'erreur de 5%**.
  - — Si f_o appartient à cet intervalle, on ne rejette pas l'hypothèse faites sur p.

Exemple 5 : *Prendre une décision*

Dans la réserve indienne d'Aamjiwnaag, située au canada, à proximité d'industries chimiques, il est né entre 1999 et 2003, 132 enfants dont 46 garçons. Est ce normal ?

Correction :

On fait ici l'hypothèse P suivante : « le sexe d'un enfant qui nait dans cette réserve est un garçon avec une probabilité de 0,5 ».

La taille de l'échantillon est $n = 132$ ($n \geqslant 25$) et la fréquence observée est $f_o = \frac{46}{132} \approx 0,34$.

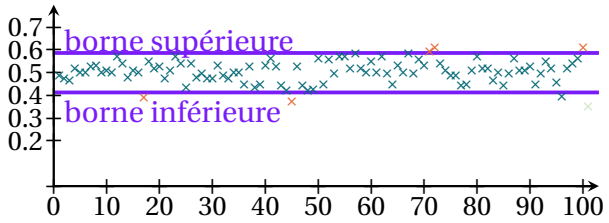
L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% est :

$$IF = \left[0,5 - \frac{1}{\sqrt{132}}; 0,5 + \frac{1}{\sqrt{132}}\right] \approx [0,41; 0,58]$$

.

$f_o \notin IF$ et on rejette l'hypothèse P. La probabilité qu'un garçon naisse dans cette réserve n'est pas de 0,5.

Les 95% sont illustrés avec le graphique qui suit :
On simule 100 fois le comptage de garçons sur 132 naissances. Dans 94 simulations, la proportion des garçons nés se trouve dans l'intervalle de fluctuation.



Tom a lancé cent fois un dé à quatre face et il a obtenu 50 « 6 ».
Que peut-on conclure ?

IV Estimation : Intervalle de confiance (p est inconnu)

L'intervalle de fluctuation permet d'avoir un intervalle où se situe la proportion inconnue p avec une probabilité de 0,95%.

Propriété :

On considère un échantillon de taille n($n \geqslant 25$) tel que $f_o \in [0,2; 0,8]$.
Alors p appartient à l'intervalle $\left[f_o - \frac{1}{\sqrt{n}}; f_o + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité de 0,95.

Définition : *Intervalle de confiance*

Un **intervalle de confiance au seuil de 95%**, relatif aux échantillons de taille n, est un intervalle centré autour de f_0 où se situe la proportion p du caractère dans la population avec une probabilité égale à 95%.
L'intervalle $\left[f_o - \frac{1}{\sqrt{n}}; f_o + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est donc appelé intervalle de confiance au seuil de 95%.

Remarque :

- ☞ On réalise un échantillon de taille n et on y obtient une fréquence observée f_o.
- ☞ On construit l'intervalle de confiance à partir de n et f_o.

La proportion réelle dans la population se situe dans cet intervalle **avec une probabilité d'environ 0,95**.

Exemple 6 : *Estimer la proportion d'un caractère*

Le 4 mai 2007 soit deux jours avant le second tour des élections présidentielles, on publie le sondage suivant réalisé auprès de 992 personnes :

S. Royal : 45%
N. Sarkozy : 55%

Interpréter ce sondage.

Correction :

On calcule l'intervalle de confiance pour N. Sarkozy :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,55 - \frac{1}{\sqrt{992}}; 0,55 + \frac{1}{\sqrt{992}}\right] \approx [0,518; 0,582]$$

.

La proportion des votants en faveur de N. Sarkozy se trouvant dans $[0,518; 0,582]$ avec 95% de chance, on peut en déduire qu'il avait de grandes chances d'être élu.

Remarque :

Les sondages sont souvent réalisés auprès d'environ 1000 personnes car cela permet de connaître la proportion d'un candidat à 3% près.

En France, au second tour de la présidentielle, il reste deux candidats, M.CHEMISE et Mme.ROBE.
Une enquête réalisée sur un groupe de 900 individus montre que 54% des personnes de cet échantillon voteront pour Mme.ROBE.
Que peut-on conclure ?